1

DERIVABILITÀ, DIFFERENZIABILITÀ, DERIVATE DIREZIONALI

DERIVATE PARZIALI

SIA $Z = f(x,y)$ UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI e $P_0(x_0, y_0)$ SIA UN PUNTO INTERNO AL SUO DOMINIO.

CHIAMIAMO RAPPORTO INCREMENTALE PARZIALE RISPETTO ALLA VARIABILE $\boxed{x}$ IL RAPPORTO TRA L'INCREMENTO PARZIALE $\boxed{h_z}$ E L'INCREMENTO DELLA VARIABILE $\boxed{x}$, $\boxed{h}$.

$$\frac{h_z}{h} = \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

ANALOGAMENTE SI DEFINISCE RAPPORTO INCREMENTALE PARZIALE RISPETTO A y CON $\boxed{K_z}$ INC. PARZIALE e $\boxed{K}$ INC. VARIABILE $\boxed{y}$:

$$\frac{K_z}{K} = \frac{f(x_0, y_0+K) - f(x_0, y_0)}{K}$$

SE POI ESISTONO RISPETTIVAMENTE I SEGUENTI LIMITI, SI HA:

- DERIVATA PARZIALE RISPETTO A $\boxed{x}$ NEL PUNTO $P_0(x_0, y_0)$

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- DERIVATA PARZIALE RISPETTO A $\boxed{y}$ NEL PUNTO $P_0(x_0, y_0)$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{K \to 0} \frac{f(x_0, y_0+K) - f(x_0, y_0)}{h}$$

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

SE $f(x,y)$ È PARZIALMENTE DERIVABILE IN $P_0(x_0, y_0)$ SIA RISPETTO A $\boxed{x}$ CHE RISPETTO A $\boxed{y}$ NULLA SI PUÒ DIRE RISPETTO ALLA SUA CONTINUITÀ IN $\boxed{P_0}$. OVVERO:

$$f \text{ derivabile in } (x_0, y_0) \not\Rightarrow f \text{ continua in } (\bar{x}, \bar{y})$$

DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ E SUPPONIAMO CHE $\exists f_x, f_y$ (f DERIVABILE SU A), $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$

ALLORA SE:

$$\exists \frac{\partial f_x}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f_x(\bar{x}+h, \bar{y}) - f_x(\bar{x}, \bar{y})}{h}$$

$$\exists \frac{\partial f_x}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(\bar{x}, \bar{y}+k) - f_x(\bar{x}, \bar{y})}{k}$$

$$\exists \frac{\partial f_y}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(\bar{x}+h, \bar{y}) - f_y(\bar{x}, \bar{y})}{h}$$

$$\exists \frac{\partial f_y}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{k \to 0} \frac{f_y(\bar{x}, \bar{y}+k) - f_y(\bar{x}, \bar{y})}{k}$$

E TALI LIMITI VALGONO PER TUTTI I PUNTI DI $\boxed{A}$, ALLORA LA FUNZIONE È DERIVABILE 2 VOLTE SU $\boxed{A}$ E SI SCRIVE:

f_{xx}, f_{yy} CHE SONO CHIAMATE DERIVATE SECONDE <u>PURE</u>

f_{yx}, f_{xy} CHE SONO CHIAMATE DERIVATE SECONDE <u>MISTE</u>

TEOREMA DI SCHWARZ

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$. SE È DERIVABILE 2 VOLTE IN $\boxed{A}$ E $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ SONO CONTINUE IN (x_0, y_0) [OVVERO SE $f \in C^2(A)$] ALLORA

$$\exists f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

GRADIENTE

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in A$, f derivabile in $(\bar{x},\bar{y})$

SI DEFINISCE IL VETTORE GRADIENTE $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \text{grad}(\bar{x},\bar{y}) = (f_x(\bar{x},\bar{y}), f_y(\bar{x},\bar{y}))$

FUNZIONE DIFFERENZIABILE

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in A$, f SI DICE DIFFERENZIABILE IN $(\bar{x},\bar{y})$ SE

A) $\exists \ \nabla f(\bar{x},\bar{y})$

B) $\exists \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x},\bar{y}) - f_x(\bar{x},\bar{y})h - f_y(\bar{x},\bar{y})k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

SI HA QUINDI CHE f È DIFFERENZIABILE IN $(\bar{x},\bar{y})$ CON:

① f DERIVABILE IN $(\bar{x},\bar{y})$

② $f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y})h + f_x(\bar{x},\bar{y})h + f_y(\bar{x},\bar{y}) + \overset{\text{INFINITESIMO}}{o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) = f(\bar{x},\bar{y}) + \underbrace{\nabla f(\bar{x},\bar{y}) \cdot (h,k)}_{\text{PRODOTTO SCALARE}}$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

DAL PUNTO DI VISTA GEOMETRICO, LA DIFF. IN UN PUNTO $(\bar{x},\bar{y})$ È LEGATA ALL'ESISTENZA DEL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DELLA FUNZIONE IN QUEL PUNTO.

L'EQUAZIONE DI TALE PIANO TANGENTE È PROPRIO LA NOSTRA f:

$$z = f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})$$

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DIFFERENZIABILI

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in A$, f DIFFERENZIABILE IN $(\bar{x},\bar{y})$ ALLORA f CONTINUA IN $(\bar{x},\bar{y})$, OVVERO:

$$f \text{ DIFFERENZIABILE in } (\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow f \text{ continua in } (\bar{x},\bar{y})$$

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in A$ APERTO.
SE f È DERIVABILE IN $\boxed{A}$ E SE f_x, f_y SONO CONTINUE IN $(\bar{x},\bar{y})$ ALLORA f È DIFFERENZIABILE IN $(\bar{x},\bar{y})$. [OVVERO $f \in C^1(A)$]

DERIVATE DIREZIONALI

SIA $v \in \mathbb{R}^2$ UN VERSORE, OVVERO UN VETTORE CON $\|v\| = 1 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $v=(\alpha,\beta)$.
SIA $(\bar{x},\bar{y}) \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$. ALLORA f È DERIVABILE IN $(\bar{x},\bar{y})$ LUNGO $v=(\alpha,\beta)$ SE E SOLO SE:

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+t\alpha, \bar{y}+t\beta) - f(\bar{x},\bar{y})}{t} \in \mathbb{R}$$

E SI SCRIVE $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y})$ O $D_v f(\bar{x},\bar{y})$

· <u>PROPOSIZIONE</u> SE f È DIFFERENZIABILE IN $(\bar{x},\bar{y}) \in A \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y})$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\|=1$

INOLTRE:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x},\bar{y}) = \nabla f(\bar{x},\bar{y}) \cdot v$$

3

APPELLO ANALISI MATEMATICA DEL 06/05/2011

DATA LA FUNZIONE

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DIRE SE g SODDISFA IN $(0,0)$ LE IPOTESI DEL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE. LA FUNZIONE È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$?

$\boxed{\text{RISOLUZIONE}}$

AFFINCHÈ LE IPOTESI DEL TEOREMA SIANO SODDISFATTE, DEVO AVERE CHE:

$$\exists f_x,\ \exists f_y,\ f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0 \ \left(\begin{matrix}\text{DERIVATE PARZIALI} \\ \text{CONTINUE IN } (0,0)\end{matrix}\right)$$

CALCOLO DAPPRIMA LE DERIVATE PARZIALI PRIME:

$$f_x = (x^2+y^2)\cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot d\left((x^2+y^2)^{-1}\right) + (2x)\cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \cancel{(x^2+y^2)}\cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}\right)\cdot 2x + (2x)\cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= -\frac{2x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)} + 2x\cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

DEFINITA IN $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow (x,y) \neq 0$

APPLICO LA DEFINIZIONE DI DER. PAR.:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0 \quad \text{CONTINUA IN } (0,0)!!!$$

$$f_y = (x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot d\left((x^2+y^2)^{-1}\right) + (2y)\cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \cancel{(x^2+y^2)}\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}\right)\cdot(2y) + 2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= -\frac{2y\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)} + 2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

DEFINITA IN $(x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow (0,0) \neq 0)$ APPLICO LA DEFINIZIONE:

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{k^{\cancel{2}}\cdot\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\cancel{k}} = 0$$

CONTINUA IN $(0,0)$!!! IPOTESI SODDISFATTE !!

ESSENDO SODDISFATTE LE IPOTESI, LA FUNZIONE È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$. PER CONFERMA, APPLICO LA DEFINIZIONE DI DIFFERENZIABILITÀ:

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot h - f_x(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to 0}\frac{(h^2+k^2)\cdot\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \Rightarrow$$

PASSO ALLE COORDINATE POLARI:

$$h = \rho\cos\theta \qquad \rho\to 0$$
$$k = \rho\sin\theta$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)\cdot\sin\left(\frac{1}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\right)}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{\cancel{2}}\cdot\sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right)}{\cancel{\rho}} = 0$$

POICHÉ ESISTE $f(\rho) = 2\rho$

$$|F(\rho,\theta)-\ell| \le f(\rho),\ \lim_{\rho\to 0} f(\rho) = 0$$

$\boxed{\text{VERIFICATO!!!}}$

APPELLO ANALISI MATEMATICA DEL 19/07/2011

DATA LA FUNZIONE:

$$g(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DIRE SE IN $(0,0)$ g È CONTINUA, PARZIALMENTE DERIVABILE, DIFFERENZIABILE, AMMETTE LE DERIVATE SECONDE MISTE, VALE LA TESI DEL TEOREMA DI SCHWARZ.

RISOLUZIONE

- PER SODDISFARE LA CONTINUITÀ, DEVO AVERE:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$$

PASSO ALLE COORDINATE POLARI:

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad \rho \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \rho^2\cos\theta\sin\theta \cdot \frac{\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cancel{\rho^2}} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \rho^2 \overbrace{\cos\theta\sin\theta}^{\text{MAX } +1} \cdot \overbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}^{\text{MAX } +1} = 0$$

POICHÉ ESISTE $f(\rho) = 2\rho^2$ CON $|F(\rho,\theta) - l| \leq f(\rho)$, $\lim_{\rho\to 0} f(\rho) = 0$ IL LIMITE ESISTE ED È PARI A ZERO!! $\boxed{g \text{ È CONTINUA IN } (0,0)}$!!!

- CALCOLO LE DERIVATE PARZIALI:

$$f_x = y\left[1 \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x \cdot \left(\frac{2x\cdot(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} + 2x^2 \cdot \left(\frac{(x^2+y^2)-(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

NON DEFINITA IN $(0,0)$. APPLICO LA DEFINIZIONE:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot 0 \cdot \frac{h^2}{h^2}}{h} = 0$$

ESISTE ED È ANCHE CONTINUA IN $(0,0)$!!

$$f_y = x\left[1\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\cdot\left(\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\right] = \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 2y^2\left(\frac{(x^2+y^2)+(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

NON DEFINITA IN (0,0). APPLICO LA DEFINIZIONE:

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0\cdot k\cdot\frac{k^2}{k^2}}{k} = 0$$

ESISTE ED È CONTINUA!!!

$\boxed{\text{g È PARZIALMENTE DERIVABILE SIA RISPETTO AD X che y IN (0,0)!!}}$

• PER IL TEOREMA DEL DIFF. TOTALE, ESSENDO f_x, f_y CONTINUE IN (0,0) LA $\boxed{g(x,y) \text{ È DIFFERENZIABILE!!!}}$ APPLICO LA DEFINIZIONE E VERIFICO:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot h-f_y(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h\cdot k\,\frac{(h^2-k^2)}{h^2+k^2}-0-0\cdot 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

PASSO ALLE COORDINATE POLARI!:
$h = \rho\cos\theta$
$k = \rho\sin\theta$ $\rho\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\rho^2}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin\theta\cdot(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = 0$$

POICHÉ ESISTE $f(\rho)=2\rho$, $|F(\rho,\theta)-l|\le f(\rho)$, $\lim_{\rho\to 0} f(\rho)=0$ ESISTE!!!

• CALCOLO LE DERIVATE SECONDE MISTE:

$$f_{xy} = \left[y\left(\frac{-2y\cdot(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right)+1\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right]+2x^2\cdot\left[\partial\left(\frac{(x^2+y^2)-(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)\right]$$

NON DEFINITA IN (0,0). APPLICO DEFINIZIONE:

$$\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k} = -1$$

$\boxed{\text{AMMETTE DERIVATA SECONDA } f_{xy} \text{ MA NON È CONTINUA IN (0,0)}}$

DOVE

$$f_x(0,k) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot k\cdot\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-0}{k} =$$

$= -k$

ESERCIZIO SULL'EQUAZIONE DI UN PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

SCRIVERE L'EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DELLA FUNZIONE:

$$f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 5xy^2 + y^3$$

NEL PUNTO $(0,1)$.

RISOLUZIONE

POICHÈ LA FUNZIONE È UN POLINOMIO, $f \in C^1(\text{I.D.})$ E, PERTANTO, PER IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE ESSA È DIFFERENZIABILE, QUINDI DOTATA DI PIANO TANGENTE LA CUI GENERICA EQUAZIONE È:

$$(\bar{x},\bar{y}) \in \text{I.D.}, \quad z = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})$$

CALCOLO, QUINDI, LE DERIVATE PARZIALI:

$$f_x = 3x^2 - 4xy + 5y^2, \quad f_x(0,1) = 5$$

$$f_y = -2x^2 + 10xy + 3y^2, \quad f_y(0,1) = 3$$

SOSTITUISCO ED OTTENGO CON $f(0,1) = 1$:

$$z = 1 + 5(x-0) + 3(y-1) = 1 + 5x + 3y - 3 = 5x + 3y - 2$$

ESERCIZIO SULLA MASSIMA PENDENZA

DATA $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, $P(2,1)$. IN QUALE DIREZIONE È MASSIMA LA DERIVATA DIREZIONALE IN P?

RISOLUZIONE

POICHÈ $f \in C^1(\text{I.D.})$, ESSA RISULTA DIFFERENZIABILE E, QUINDI, VALE IL TEOREMA SULLA MASSIMA PENDENZA PER CUI LA DIREZIONE IN CUI LA DERIVATA DIR. È MASSIMA È QUELLA INDICATA DAL GRADIENTE, OVVERO:

CON $\nabla f(P) \neq 0$

$$v = \pm \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|} = \pm\left(\frac{f_x(P)}{\|\nabla f(P)\|}, \frac{f_y(P)}{\|\nabla f(P)\|}\right)$$

CALCOLIAMO, PERTANTO, LE DERIVATE PARZIALI:

$$f_x(x,y) = 2x + 2y \quad , \quad f_x(2,1) = 6$$

$$f_y(x,y) = 2x + 4y \quad , \quad f_y(2,1) = 8$$

IL GRADIENTE RISULTA $\nabla f(P) = (6, 8) \neq (0,0)$!!!

LA NORMA DEL GRADIENTE, INVECE, È:

$$\|\nabla f(2,1)\| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

INFINE, RISULTA:

$$v = \pm\left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right) = \pm\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

APPELLO ANALISI MATEMATICA 30/09/2011

DATA LA FUNZIONE

$$g(x,y)=\sqrt[3]{x^2(y-1)}+1$$

DIRE SE È DIFFERENZIABILE IN $(0,1)$ E CALCOLARE $D_v g(0,1)$ PER OGNI DIREZIONE $v \in \mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{RISOLUZIONE}}$

PER VERIFICARE LA DIFFERENZIABILITÀ, CALCOLO LE DERIVATE PARZIALI PRIME:

$$f_x = 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{[x^2(y-1)]^2}}\cdot 2x(y-1) \text{, NON DEFINITA IN } (0,1)$$

$$f_y = 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{[x^2(y-1)]^2}}\cdot x^2\cdot 1 \text{, NON DEFINITA IN } (0,1)$$

APPLICO LA DEFINIZIONE:

$$f_x(0,1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,1)-f(0,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2\cdot 0}+1-1}{h}=0$$

$$f_y(0,1)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,1+k)-f(0,1)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt[3]{0(1+k-1)}+1-1}{k}=0$$

LE DERIVATE PARZIALI ESISTONO, VERIFICO ORA CHE SIA SODDISFATTA L'UGUAGLIANZA:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,1+k)-f(0,1)-f_x(0,1)\cdot h-f_y(0,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{h^2(1+k-1)}-1-h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

PASSO ALLE COORDINATE POLARI

$h=\rho\cos\theta$ $\quad \rho\to 0$

$k=\rho\sin\theta$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt[3]{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}-1-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta}{\rho}=0 \Rightarrow \lim_{\rho\to 0}\sqrt[3]{\cos^2\theta\sin\theta}-1-\cos\theta-\sin\theta$$

POICHÉ IL LIMITE DIPENDE DA θ NON ESISTE!!

5

$$f_{yx} = \left[1 \cdot \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} + x \cdot \left(\frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2} \right) \right] - 2y^2 \cdot \left[\frac{2(x^2+y^2)+(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

NON DEFINITA IN $(0,0)$. APPLICO LA DEFINIZIONE!

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1 \quad \boxed{\text{ESISTE MA NON È CONTINUA}}$$

CON

$$f_y(h,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = \frac{h \cdot k \cdot \frac{h^2-k^2}{h^2+k^2} - 0}{k} = +h$$

QUINDI $g(x,y)$ AMMETTE DERIVATE SECONDE MISTE

· QUESTE, PERÒ, NON SONO CONTINUE E QUINDI NON VALE LA TESI DEL TEOREMA DI SCHWARZ, DIFATTI:

$$f_{yx}(0,0) \neq f_{xy}(0,0)$$

(PROSEGUE DA DIETRO)

QUINDI g NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,1)$!!!

CALCOLIAMO ORA LA DERIVATA DIREZIONALE:

$\|v\| = 1$, $v = (\alpha, \beta)$

$$D_v g(0,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\alpha, 1+t\beta) - f(0,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2\alpha^2(t\beta^2)} - 1}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \sqrt[3]{\alpha^2\beta} - 1 = \sqrt[3]{\alpha^2\beta} - 1 \quad \exists \frac{\partial f(0,1)}{\partial v} = \alpha^2\beta - 1 \ \forall v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = 1$$

IL RISULTATO CONFERMA LA NON DIFFERENZIABILITÀ, DIFATTI $\alpha^2\beta - 1$ È SEMPRE DIVERSO DA -1, AD ECCEZIONE DI $v=(0,1)$, $v=(1,0)$