APPUNTI DI
ANALISI MATEMATICA II

PROF. ROSSELLA BARTOLO 2010/2011

DAVIDE DIANA

DIMOSTRAZIONI PER ORALE:

PAG. 3 DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY - SCHWARZ

ANALISI MATEMATICA II

2010/2011

CONCETTI UTILI PER UNA CORRETTA COMPRENSIONE DEGLI APPUNTI (RICHIAMI ANCHE NON STRETTAMENTE CONNESSI ALL'ANALISI)

SPAZIO VETTORIALE: RAPPRESENTA L'INSIEME FORMATO DAI VETTORI DEL PIANO CARTESIANO (ORDINARIO O TRIDIMENSIONALE) DOTATI DELLE OPERAZIONI DI SOMMA DI VETTORI E DI MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UNO SCALARE.

CAMPO: RAPPRESENTA UN INSIEME NON VUOTO MUNITO DI DUE OPERAZIONI BINARIE (FUNZIONE CHE RICHIEDE DUE ARGOMENTI DELLO STESSO INSIEME X E RESTITUISCE UN ELEMENTO DI X) DETTE SOMMA E PRODOTTO. IL CAMPO È NECESSARIO PER LA DEFINIZIONE DI SPAZIO VETTORIALE. UN ELEMENTO DEL CAMPO È DETTO SCALARE.

GRUPPO ABELIANO: È UN GRUPPO (INSIEME AL QUALE SI ASSOCIA UN'OPERAZIONE BINARIA) LA CUI OPERAZIONE BINARIA GODE DELLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA.

COPPIA ORDINATA: COLLEZIONE DI DUE OGGETTI TRA I QUALI SI DISTINGUE UN PRIMO COMPONENTE DA UN SECONDO COMPONENTE.

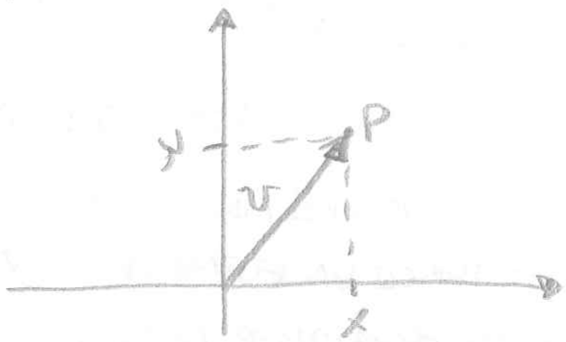
NEGLI APPUNTI SEGUENTI SI AFFRONTERANNO I SEGUENTI MACROARGOMENTI:

1. FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI
2. EQUAZIONI DIFFERENZIALI
3. INTEGRALI CURVILINEI E FORME DIFFERENZIALI NEL PIANO
4. INTEGRALI DOPPI

① FUNZ. IN PIÙ VARIABILI

NELL'AMBITO DELLO STUDIO DI FUNZIONI IN PIÙ DI UNA VARIABILE, ABBIAMO NECESSITÀ DI OPERARE SULL'INSIEME $\mathbb{R}^2$, COSTITUITO DALLE <u>COPPIE ORDINATE</u> (x, y) OTTENUTE AL VARIARE DI $x, y \in \mathbb{R}$.

POSSIAMO, QUINDI, RAPPRESENTARE TALI COPPIE SUL PIANO CARTESIANO:



DA TALE RAPPRESENTAZIONE CONSEGUE LA POSSIBILITÀ DI POTER ASSOCIARE AD OGNI COPPIA ORDINATA UN <u>VETTORE</u> $v \in \mathbb{R}^2$.

ASSERITO CIÒ, POSSIAMO DEFINIRE $\mathbb{R}^2$ ~~UNO~~ <u>SPAZIO VETTORIALE</u> CONSIDERANDO COME CAMPO DI RIFERIMENTO $\boxed{\mathbb{R}}$.

$\mathbb{R}^2$, PERTANTO, SARÀ DOTATO DI DUE OPERAZIONI:

- <u>OPERAZIONE SOMMA</u> $(+)$ DEFINITA COME LEGGE DI COMPOSIZIONE INTERNA INQUANTO L'INSIEME DI ARRIVO È IL MEDESIMO DEGLI OGGETTI DI PARTENZA

  $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

  DATI $u, v \in \mathbb{R}^2$, APPLICANDO L'OPERATORE SI HA:

  $(u, v) \longrightarrow u + v$

  IN CUI VALGONO LE PROPRIETÀ <u>ASSOCIATIVA</u>:

  $u + (v + w) = (u + v) + w$ CON $w \in \mathbb{R}^2$

  E <u>COMMUTATIVA</u>:

  $u + v = v + u$

(2) INOLTRE, SONO VALIDE ANCHE LE SEGUENTI ASSERZIONI:

$\exists\ \emptyset \in \mathbb{R}^2$ t.c. $u + \emptyset = \emptyset + u = u$ (ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO)

$\forall u \in \mathbb{R}^2\ \exists\ v = -u$ t.c. $u + v = v + u = \emptyset$ (ESISTENZA DELL'INVERSO)

NOTA: POICHÈ $\mathbb{R}^2$ è UN GRUPPO IN CUI L'OPERATORE BINARIO (+) GODE DELLA PROPRIETÀ ~~ASSOC.~~ COMMUTATIVA, ESSO È ANCHE ABELIANO

$$(\mathbb{R}^2, +) \text{ gruppo abeliano}$$

✓ OPERAZIONE MOLTIPLICAZIONE DEFINITA COME LEGGE DI COMPOSIZIONE ~~INTERNA~~ ESTERNA POICHÈ L'INSIEME DI ARRIVO DIFFERISCE DA QUELLO DEGLI OGGETTI DI PARTENZA.

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

APPLICANDO L'OPERATORE CON $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^2$ SI HA:

$$(\lambda, u) \longrightarrow \lambda u$$

IN CUI VALGONO LE PROPRIETÀ SEGUENTI:

$$(\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v) \quad \text{con } v \in \mathbb{R}$$

$$1 u = u$$

$$(\lambda + v) u = \lambda u + v u \quad \text{con } v \in \mathbb{R}$$

$$\lambda (u + v) = \lambda u + \lambda v \quad \text{con } v \in \mathbb{R}^2$$

PROCEDIAMO ORA CON ALCUNE DEFINIZIONI UTILI PER OPERARE NEL MODO PIÙ AGEVOLE SU $\mathbb{R}^2$

- DEFINIAMO L'APPLICAZIONE (O FUNZIONE) <u>NORMA</u> CHE È NORMALMENTE UTILIZZATA SUI VETTORI MA, SE APPLICATA SU UNO SCALARE IN $\mathbb{R}$, È EQUIVALENTE AL <u>MODULO</u> (O VALORE ASSOLUTO)

SI DEFINISCE <u>APPLICAZIONE NORMA</u>, DEFINITA DA $\mathbb{R}^2$ A VALORI POSITIVI:

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty[$$

OVVERO TALE FUNZIONE ASSOCIA AD UN VETTORE UNO <u>SCALARE POSITIVO</u>. CON $u=(x,y)$ SI HA:

$$u \longrightarrow \|u\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

LE PROPRIETÀ DELLA <u>NORMA</u> SONO LE SEGUENTI:

✓ LA NORMA È SEMPRE POSITIVA ($\|u\| > 0$)

✓ È ZERO SE E SOLO SE $u=0$ ($\|u\|=0 \Leftrightarrow u=0$)

✓ LA NORMA DEL PRODOTTO TRA UN VETTORE ED UNO SCALARE È:

$$\|\lambda u\| = \underbrace{|\lambda|}_{\text{VALORE ASSOLUTO}} \cdot \overbrace{\|u\|}^{\text{NORMA}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

✓ È VALIDA LA <u>DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE</u>

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

- PASSIAMO AD INTRODURRE IL <u>PRODOTTO SCALARE</u> TRA DUE VETTORI, IL QUALE RAPPRESENTA UN'APPLICAZIONE CHE RESTITUISCE COME RISULTATO UNO SCALARE:

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

CHE CON $u, v \in \mathbb{R}^2$ FORNISCE LA <u>SOMMA DELLE COMPONENTI OMOLOGHE</u> DEI VETTORI DI PARTENZA:

$$(u, v) \longrightarrow u \cdot v := u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \quad \text{DOVE} \quad \begin{matrix} u=(u_1, u_2) \\ v=(v_1, v_2) \end{matrix}$$

IL PRODOTTO SCALARE SI PUÒ INDICARE IN VARI MODI: ③

$$u \cdot v = \langle u, v \rangle = (u, v)$$

E GODE DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ:

$\vee \; u \cdot v = v \cdot u$

$\vee \; \|u\|^2 = u \cdot u$

$\vee \; (\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha u \cdot w + \beta v \cdot w$ CON $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}^2$

$\downarrow$

COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI PARTENZA

• CON LE DEFINIZIONI FIN QUÌ DATE, POSSIAMO ESPORRE LA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ. (LO CHIEDE ALL'ORALE)

PRELIMINARMENTE, RICORDIAMO CHE È VERA LA SEGUENTE UGUAGLIANZA:

$$|x| \cdot |y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \; \forall \; \substack{x \\ y} \in \mathbb{R}$$

DIFATTI:

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 - 2|x| \cdot |y| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| \cdot |y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

CAUCHY e SCHWARZ AFFERMANO CHE PRESI DUE VETTORI u, v IL VALORE ASSOLUTO DEL LORO PRODOTTO SCALARE È PARI AL PRODOTTO DELLA NORMA DEI DUE VETTORI, CIOÈ AL PRODOTTO DI DUE NUMERI.

$$\forall \; \substack{u \\ v} \in \mathbb{R}^2 \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

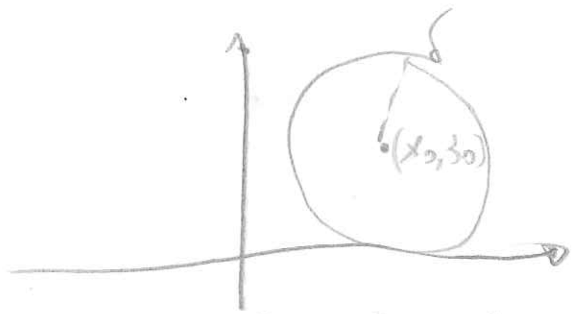
1

RIPRENDIAMO ORA ALCUNI CONCETTI DI TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}$ E ANALIZZIAMOLI IN $\mathbb{R}^2$.

IN $\mathbb{R}$, SI DEFINISCE INTORNO DI CENTRO $\boxed{X}$ E SEMIDIMENSIONE $\boxed{\delta}$ LA SEGUENTE RAPPRESENTAZIONE:

$$x_0 \in \mathbb{R}, \ \delta > 0 \quad \exists \quad I :=]x_0 - \delta, \ x_0 + \delta[$$

PASSANDO ALL'ANALISI IN $\mathbb{R}^2$, LA RAPPRESENTAZIONE SARÀ:



DATO UN PUNTO $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ E CONSIDERATO UN $\delta > 0$, SI DENOTA CON $\underline{B(P_0)}$ L'INTORNO SU $\mathbb{R}^2$ DOVE:

$$B_\delta(P_0) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \}$$

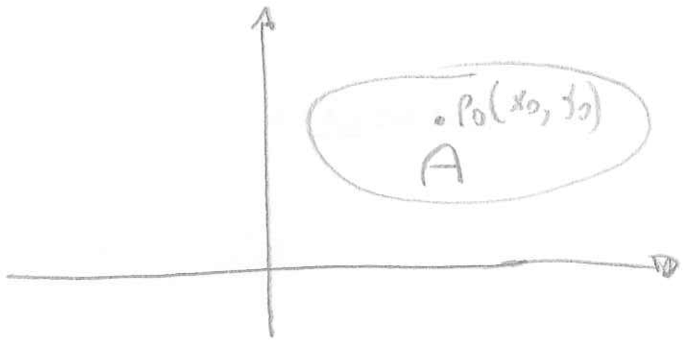
DOVE

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

- OVVERO STIAMO DEFINENDO L'INTORNO L'INSIEME DEI PUNTI ALL'INTERNO DEL CERCHIO DI CENTRO $P_0(x_0, y_0)$ E RAGGIO δ!!

SE INDICO $\overline{B_\delta(P_0)}$ INDICO <u>L'INTORNO CHIUSO</u> $(\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta)$

· DEFINIAMO, INVECE, PUNTO INTERNO AD $\boxed{A}$ COME SEGUE:

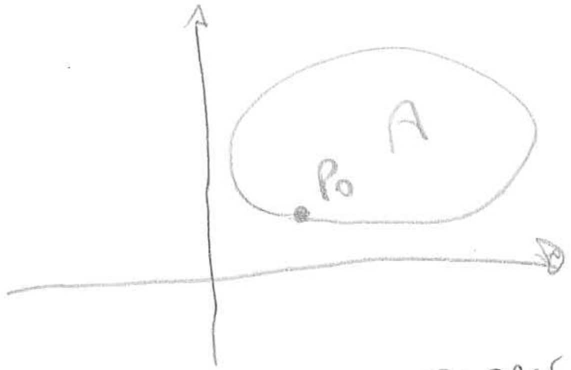


· P_0 è INTERNO AD $\boxed{A}$ SE ESISTE ALMENO UN INTORNO CHE SI TROVA ALL'INTERNO DI $\boxed{A}$.

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } B_\delta(x_0, y_0) \subset A$$ (INTORNO DI P_0 è CONTENUTO IN A)

· P_0 è INVECE ESTERNO SE È ~~[illegible]~~ INTERNO AL COMPLEMENTARE DI $\boxed{A}$ $\left(C_{\mathbb{R}^2}(A) \right)$

· P_0 è UN PUNTO DI FRONTIERA SE NON È NÉ INTERNO NÉ ESTERNO



SI DEFINISCE PUNTO DI ACCUMULAZIONE UN PUNTO $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ PER $\boxed{A \in \mathbb{R}^2}$ SE:

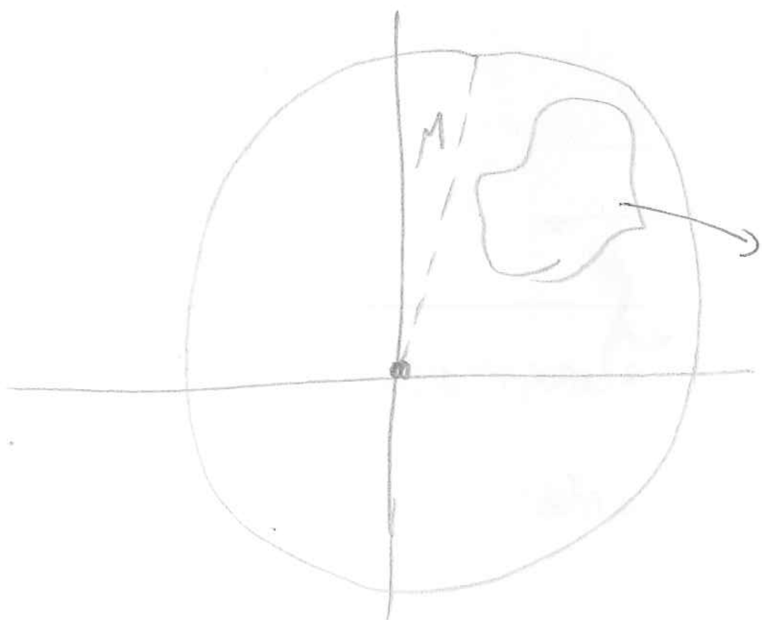
$$\forall \delta > 0 : \left(B_\delta(x_0, y_0) - \{ (x_0, y_0) \} \right) \cap A \neq \emptyset$$

! RICHIAMO: NELL'INSIEME $\mathbb{N}$ (NUMERI NATURALI) NON CI SONO PUNTI DI ACCUMULAZIONE!! INFATTI:

IN QUESTO INTORNO PRIVO DI P_0, L'INTERSECATO CON TUTTO L'INSIEME DÀ L'INSIEME NULLO!!!

1) UN INSIEME IN $\mathbb{R}^2$ È LIMITATO SE:

$X \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO SE $\exists\, M>0$ t.c. $\|x\| \leq M \quad \forall x \in X$



$B_M(0) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq M \}$

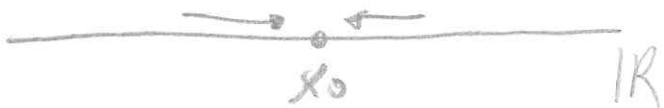
L'INSIEME È LIMITATO IN QUANTO È CONTENUTO NELLA CIRCONFERENZA DI RAGGIO $\boxed{M}$ e ORIGINE ZERO.

- L'INSIEME $A \subseteq \mathbb{R}^2$ SI DICE APERTO SE OGNI PUNTO (x_0, y_0) È INTERNO AD $\boxed{A}$.
- SI DICE, INVECE CHIUSO SE IL COMPLEMENTARE DI A $(C_{\mathbb{R}^2}A)$ È APERTO.

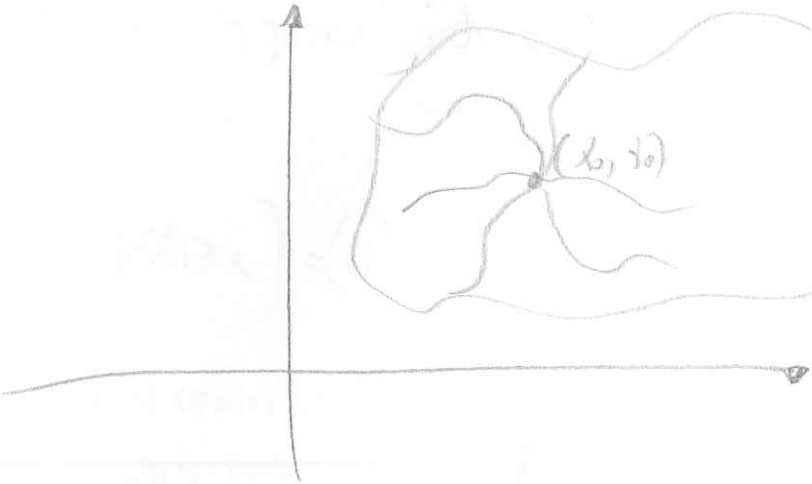
NOTA: UN INSIEME $A \subseteq \mathbb{R}^2$ NON POTRÀ MAI ESSERE CONTEMPORANEAMENTE APERTO e CHIUSO AD ECCEZIONE DI $\emptyset$ e $\mathbb{R}^2$.

→ PASSIAMO AD INTRODURRE LA TEORIA SUI LIMITI e CONTINUITÀ.

NELL'AMBITO DI $\mathbb{R}$, IL LIMITE RISPETTO AD UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE È DEFINITO SE IL LIMITE DESTRO e SINISTRO DEL PUNTO COINCIDONO:



· PASSANDO AD $\mathbb{R}^2$ ABBIAMO:



SONO MOLTEPLICI I POSSIBILI "PERCORSI" PER POTER ARRIVARE AL PUNTO DI ACCUMULAZIONE.

LA DEFINIZIONE RIGOROSA È LA SEGUENTE:

DEF

SIA DATA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) P. di A. PER A.

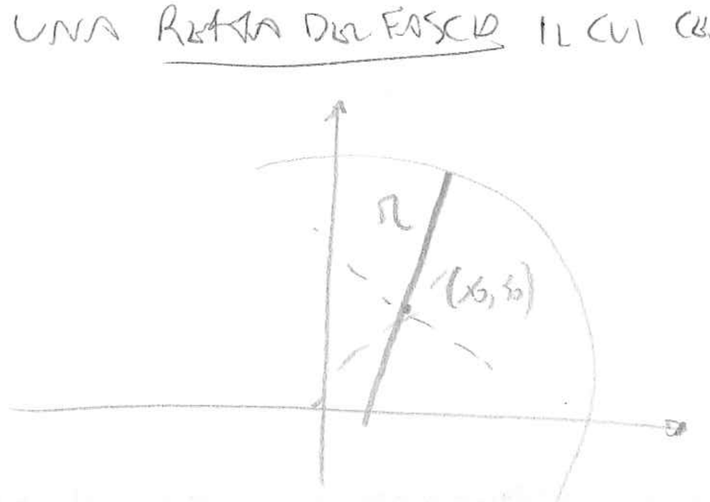
SI DICE CHE f HA LIMITE $l \in \hat{\mathbb{R}}$ $(\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\})$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c. $\forall (x, y) \in (B_\delta(x_0, y_0) \setminus \{x_0, y_0\}) \cap A$

SI HA $|f(x,y) - l| < \varepsilon$ E SI SCRIVE

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = l$$

· TALE DEFINIZIONE RISULTA ALQUANTO COMPLESSA IN TERMINI PRATICI. PERTANTO PER VERIFICARE L'ESISTENZA DI UN LIMITE SI FA RIFERIMENTO AD UNA RETTA DEL FASCIO IL CUI CENTRO È IL PUNTO DI ACCUMULAZIONE:



$y = y_0 + m(x - x_0)$

con $m \in \mathbb{R}$ (COEFFICIENTE ANGOLARE)

(3)

SI OSSERVA CHE SUPPONENDO L'ESISTENZA DEL LIMITE:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \quad \text{(senza ledere alla generalità } l \in \mathbb{R})$$

FISSANDO $m \in \mathbb{R}$ CON RETTA $y = y_0 + m(x-x_0)$ SI HA:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall (x,y) \in A : 0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \text{ t.c.}$$

$$|f(x, y_0+m(x-x_0)) - l| < \varepsilon$$

OVVERO

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x, y_0+m(x-x_0)) = l} \leftarrow \text{LIMITE IN UNA VARIABILE!!}$$

QUINDI LA CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE AFFINCHÉ ESISTA

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

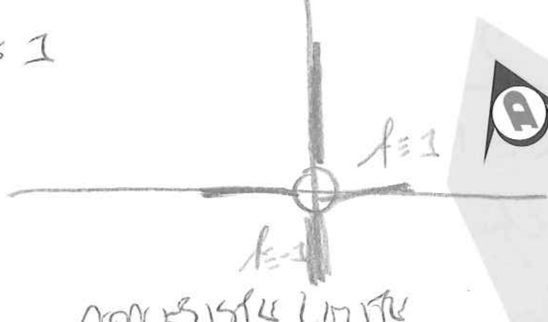
È CHE

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y_0) = \lim_{y\to y_0} f(x_0,y)$$

ESEMPIO DIRE SE $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ I.D. $x^2+y^2=0 \iff x=0 \wedge y=0$

$$f(x,0) = \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$$

$$f(0,y) = -1$$



QUINDI

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = -1$$

NON ESISTE LIMITE VISTO CHE NON È RISP. LA CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE!!

· IN ULTIMO SI OSSERVI CHE:

$$f(x, mx) \quad \text{e } y_0, x_0 = 0 \quad \text{con } r: y_0 + m(x - x_0)$$

SI HA

$$f(x, mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

· PASSIAMO ORA AD I CONCETTI LEGATI ALLA CONTINUITÀ:

SAPPIAMO CHE IN $\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE È CONTINUA ~~SE È~~ IN UN PUNTO SE ESSO È ISOLATO O SE ESISTE IL LIMITE NEL PUNTO.

IN $\mathbb{R}^2$ SI HA:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$(x_0, y_0) \in A$; se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ t.c. $\forall (x, y) \in A$ CHE DISTI DA (x_0, y_0) UNA QUANTITÀ MINORE DI δ $\left(\|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta\right)$:

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

· QUINDI SE (x_0, y_0) È PUNTO ISOLATO, LA f È CONTINUA SU (x_0, y_0).

· ALTRIMENTI SI HA CHE SI DEVE AVERE

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

SIA $f: K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

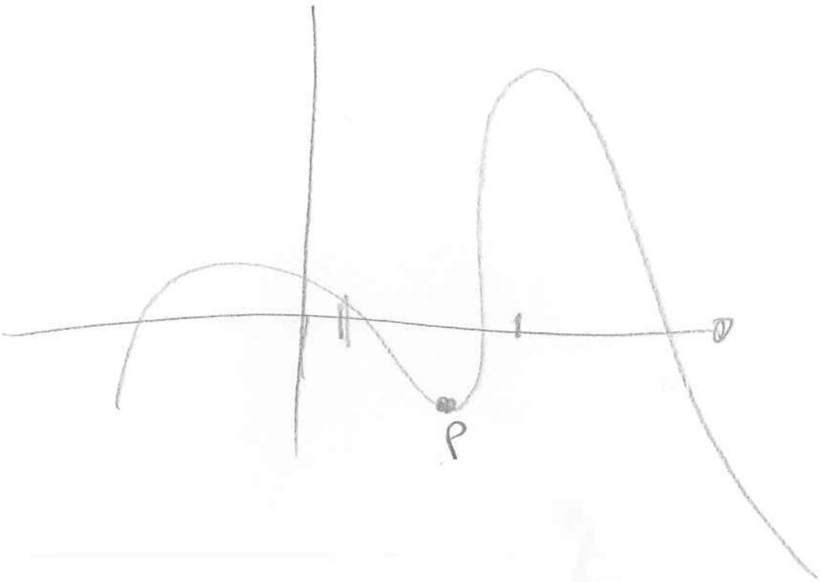
con K chiuso e limitato (INSIEME COMPATTO)

f continua

Allora $\exists \begin{matrix}(x_1, y_1) \\ (x_2, y_2)\end{matrix} \in K$ t.c. $f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2)$

$\forall (x, y) \in K$

(ESISTENZA DEI MASSIMI e MINIMI)



• LA FUNZIONE IN FIGURA NON HA MINIMO ASSOLUTO MA MINIMO RELATIVO (P)

· SU $\mathbb{R}^2$, UN INSIEME È CONNESSO SE NON ESISTONO DUE INSIEMI DISGIUNTI LA CUI UNIONE LO GENERA.

DEF: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ SI DICE CONNESSO $\iff \nexists \; A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTI NON NON E DISGIUNTI T.C. $A = A_1 \cup A_2$

← SONO DISGIUNTI!

TEOREMA DI BOLZANO (O DEI VALORI INTERMEDI)

SIA $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA
CON D DOMINIO (CHIUSURA DI UN APERTO) LIMITATO E CONNESSO $\Rightarrow$
f ASSUME TUTTI VALORI COMPRESI TRA max f e min f

NOTA: PER CHIUSURA SI INTENDE CHE:
$X \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \bar{X} := X \cup \mathrm{Fr}\,X$ (PUNTI DI FRONTIERA DI X)
OPPURE $\bar{X} := X \cup \mathrm{Dr}\,X$ (PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI X AL FINITO)

①

INTEGRALI CURVILINEI E FORME DIFFERENZIALI

- CONSIDERIAMO UNA PARTICELLA PUNTIFORME CHE SI MUOVE SU DI UN PIANO, NELL'INTERVALLO DI TEMPO $I=[t_0,t_1]$.

FISSATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO, PER OGNI $t\in[t_0,t_1]$ INDICHIAMO CON $(x(t),\ y(t))$ LE COORDINATE DELLA PARTICELLA NELL'ISTANTE t.

ALLORA CHIAMIAMO CURVA UN'APPLICAZIONE <u>CONTINUA</u>:

$$f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$$

DOVE $\forall t\in I$ SI HA:

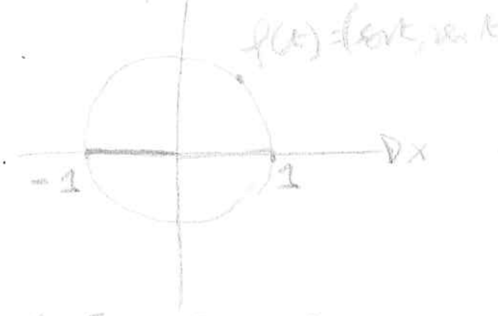
$$f(t)=(x(t),\ y(t))$$

$x(t)$ e $y(t)$, CIOÈ LE COMPONENTI DI f, SONO DETTE <u>EQUAZIONI PARAMETRICHE</u>. IL CODOMINIO $f(I)$ È DETTO <u>SOSTEGNO</u> DELLA CURVA ED È UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^2$.

- LE CURVE $f_1:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ e $f_2:[0,4\pi]\to\mathbb{R}^2$ CON EQUAZIONI PARAMETRICHE:

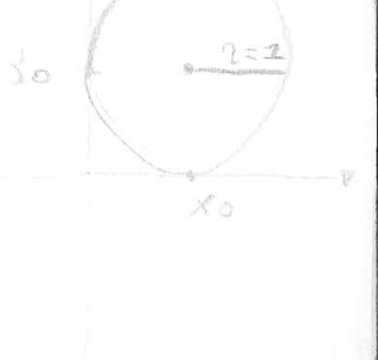
$$\begin{cases} x_1(t)=\cos t \\ y_1(t)=\sin t \end{cases} t\in[0,2\pi] \qquad \begin{cases} x_2(t)=\cos t \\ y_2(t)=\sin t \end{cases} t\in[0,4\pi]$$

HANNO STESSO SOSTEGNO (CIRCONFERENZA UNITARIA CENTRATA NELL'ORIGINE) MA SONO DIVERSE POICHÈ UNA COMPIE UN GIRO COMPLETO IN SENSO ANTIORARIO (f_1) E L'ALTRA DUE GIRI COMPLETI IN SENSO ANTIORARIO (f_2)



$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$f:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^2$



$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

• SIA $f: I \to \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f(t) = (x(t), y(t))$ $\forall t \in I$.

SE $x(t), y(t)$ SONO DERIVABILI, ALLORA:

$$f'(t) = (x'(t), y'(t))$$

CHE PRENDE IL NOME DI <u>VETTORE TANGENTE</u> AL PUNTO $t \in I$.

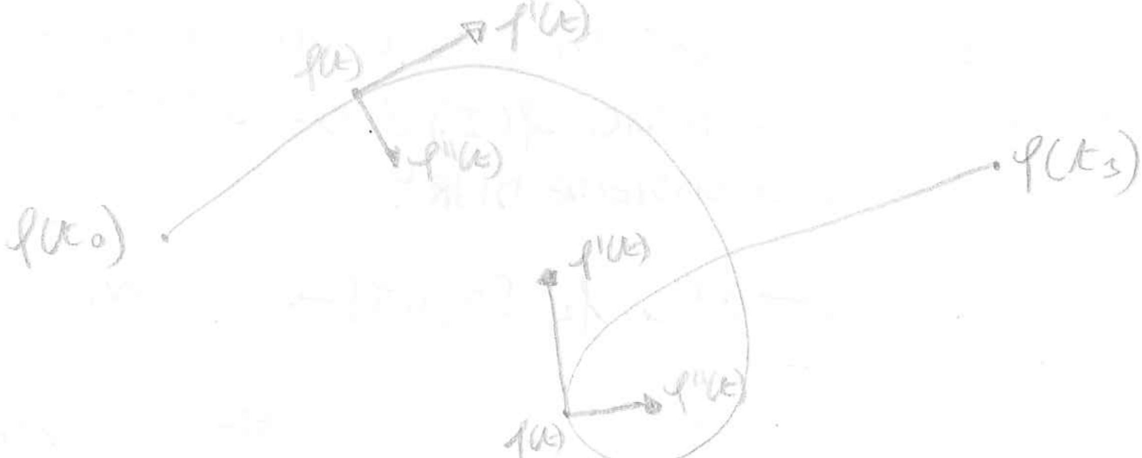
LA <u>NORMA</u> (MODULO) DI TALE VETTORE RISULTA:

$$|f'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

SE $x(t), y(t)$ SONO DUE VOLTE DERIVABILI, ALLORA:

$$f''(t) = (x''(t), y''(t))$$

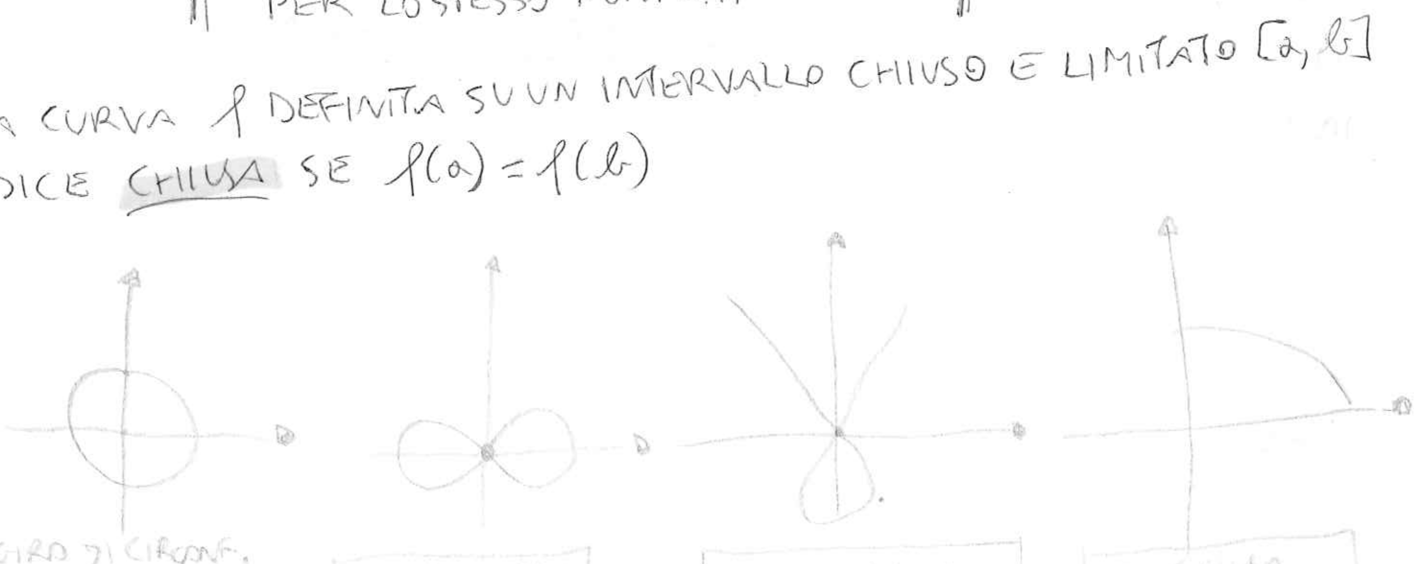
CHE PRENDE IL NOME DI <u>VETTORE ORTOGONALE</u> ~~AL~~ PUNTO $t \in I$ SE $|f'(t)| = 1$



• UNA CURVA $f: I \to \mathbb{R}^2$ È <u>SEMPLICE</u> SE PRESI t_1, t_2 DI CUI ALMENO UNO INTERNO AD I, RISULTA $f(t_1) \neq f(t_2)$

‖ CIOÈ LA CURVA NON PASSA DUE VOLTE PER LO STESSO PUNTO!!! ‖

• UNA CURVA f DEFINITA SU UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a, b]$ SI DICE <u>CHIUSA</u> SE $f(a) = f(b)$



1 GIRO DI CIRCONF. — SEMPLICE E CHIUSA | CHIUSA NON SEMPLICE | NON CHIUSA E NON SEMPLICE | NON CHIUSA SEMPLICE

- SIA I INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a,b]$. DIREMO CHE

$$f: I \to \mathbb{R}^2$$

È **REGOLARE** SE $f \in C^1([a,b])$ E SE $\forall t \in]a,b[$

$$f'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0,0) \text{ (VETTORE NULLO)}$$

CIOÈ DEVE ESSERE SODDISFATTA LA RELAZIONE:

$$([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2) > 0$$

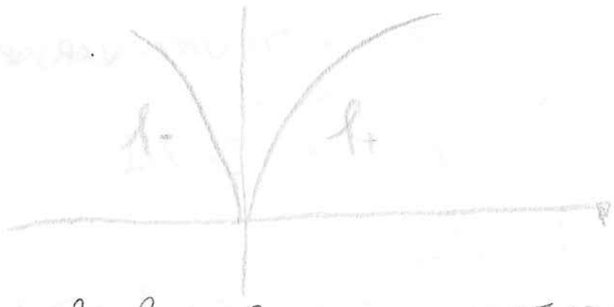
LA CURVA $f(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1,1]$ NON È REGOLARE, INFATTI:

$$f'(t) = (3t^2, 2t) \quad , t \in [-1,1]$$

CHE IN $t=0$ È:

$$f'(0) = (0,0)$$

IL GRAFICO DI TALE CURVA È:



SE CONSIDERIAMO $f = f_- \cup f_+$ CHE RISULTANO:

$$f_-(t) = (t^3, t^2) \quad t \in [-1, 0]$$
$$f_+(t) = (t^3, t^2) \quad t \in [0, +1]$$

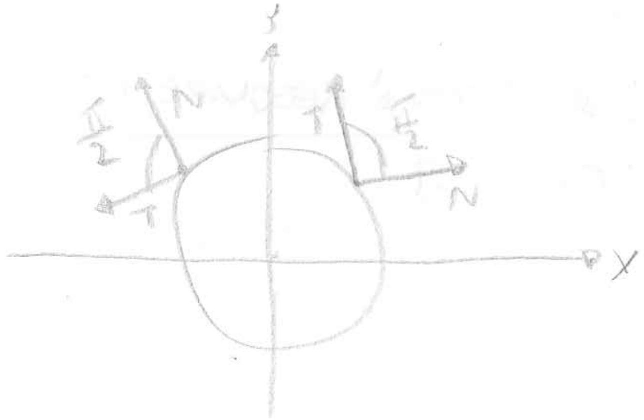
E SONO REGOLARI, SI DICE CHE f È REGOLARE A TRATTI.

- SIA $f: I \to \mathbb{R}^2$, $I = [a,b]$, f REGOLARE. ALLORA SI PUÒ DEFINIRE IL VERSORE TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO $f(t_0), t_0 \in I$ COME:

$$T(t_0) = \frac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|} = \left(\frac{x'(t_0)}{\sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2}}, \frac{y'(t_0)}{\sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2}} \right)$$

SI PUÒ INOLTRE DEFINIRE IL <u>VERSORE NORMALE</u> ALLA CURVA f NEL PUNTO $f(t_0)$, $t_0 \in I$ CHE SI OTTIENE RUOTANDO IL VERSORE TANGENTE DI $\frac{\pi}{2}$ IN SENSO ORARIO.

$$N(t_0) = \left(\frac{y'(t_0)}{\sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2}}, \frac{-x'(t_0)}{\sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2}} \right)$$



SE $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ È LA CIRCONFERENZA:

$$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

SI HA:

$$T(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$N(t) = (\cos t, +\operatorname{sen} t)$$

- SIA $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE DI CLASSE $C^1[a, b]$. CONSIDERANDO LA CURVA:

$$f(t) = (\underbrace{t}_{x(t)}, \underbrace{f(t)}_{y(t)}), \quad t \in [a, b]$$

ESSA AVRÀ COME SOSTEGNO IL GRAFICO DI f ED AVRÀ LE SEGUENTI CARATTERISTICHE:

1. È CONTINUA, POICHÉ LE SUE COMPONENTI SONO CONTINUE ($\boxed{t}$ è continua, f È DI CLASSE C^1 PER IPOTESI)

2. È REGOLARE, POICHÉ $f'(t) = (1, f'(t))$ CHE È SEMPRE DIVERSO DAL VETTORE NULLO.

APPROFONDIMENTO: PASSARE DA PARAMETRI A EQUAZIONE

SE HO LA CURVA DI PARAMETRI $f(t) = (t^3, t^2)$, TROVO L'EQUAZIONE SVOLGENDO IL SISTEMA:

$$\text{con } t \in [-1, 1] \quad \begin{cases} x(t) = x \\ y(t) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x^{1/3} \\ y = (x^{1/3})^2 = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2} \end{cases}$$

QUINDI L'EQUAZIONE RISULTA:

$$y = \sqrt[3]{x^2} \quad \text{con } x \in [-1, 1]$$

(3) TALVOLTA PUÒ ESSERE CONVENIENTE SCRIVERE L'EQUAZIONE DI UNA CURVA IN UN OPPORTUNO SISTEMA DI COORDINATE. SE L'EQUAZIONE DI UNA CURVA IN COORDINATE POLARI È:

$$\rho = \rho(\theta)$$

LE SUE EQUAZIONI CARTESIANE SONO:

$$x = \rho(\theta) \cdot \cos\theta \quad , \quad y = \rho(\theta) \cdot \sin\theta$$

PERTANTO $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ È PARAMETRO DELLA CURVA:

$$f : [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}^2 \text{ CON}$$

$$f(\theta) = \left(\rho(\theta) \cdot \cos\theta , \ \rho(\theta) \cdot \sin\theta \right)$$

INOLTRE SE $\rho(\theta) \in C^1([\theta_0, \theta_1])$ LA CONDIZIONE DI REGOLARITÀ RISULTA:

$$(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2 > 0$$

- PER TRASFORMARE L'EQUAZIONE CARTESIANA DI UNA DATA CURVA IN UNA EQ. POLARE BASTERÀ PORRE:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \to \text{MI STO CENTRANDO NELL'ORIGINE!!!}$$

AD ESEMPIO LA CURVA DI EQ. CARTESIANA:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad \text{(CIRCONFERENZA UNITARIA CON CENTRO NEL PUNTO } (1, 0))$$

$-2x_0 = -2 \Rightarrow x_0 = 1$

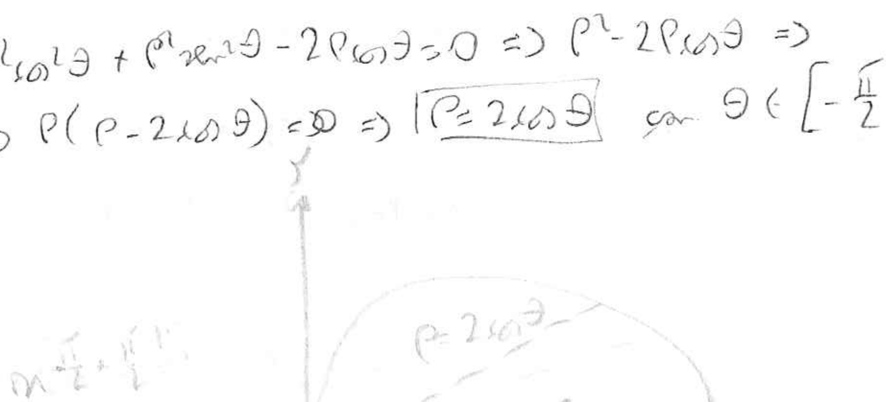
$-2y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$

$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0 \Rightarrow 1 + 0 - r^2 \Rightarrow r = 1$

DIVENTA:

$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta - 2\rho\cos\theta = 0 \Rightarrow \rho^2 - 2\rho\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(\rho - 2\cos\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = 2\cos\theta} \text{ con } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



IN ALTERNATIVA, POSSO CENTRARE IL MIO RIFERIMENTO NEL PUNTO $(1,0)$:

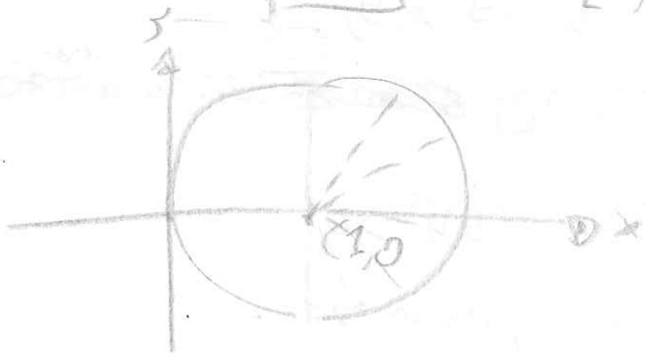
$$\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

ED OTTENGO:

$$(1+\rho\cos\theta)^2 + \rho^2\sin^2\theta - 2(1+\rho\cos\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\rho^2\cos^2\theta + \cancel{2\rho\cos\theta} + \rho^2\sin^2\theta - 2 - \cancel{2\rho\cos\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+\rho^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\rho = 1} \quad \theta\in[0,2\pi]$$



- CONSIDERIAMO UNA CURVA $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $\varphi\in C^1$, DI EQ. PAR. $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t\in[a,b]$. SI DEFINISCE <u>LUNGHEZZA DELLA CURVA</u> IL NUMERO:

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

AD ESEMPIO LA CURVA

$$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^2$$

CON PARAMETRI

$$\varphi(t) = (x_0 + t(x_1-x_0),\ y_0 + t(y_1-y_0)),\ t\in[0,1]$$

È RAPPRESENTATA DA UN SEGMENTO DI ESTREMI:

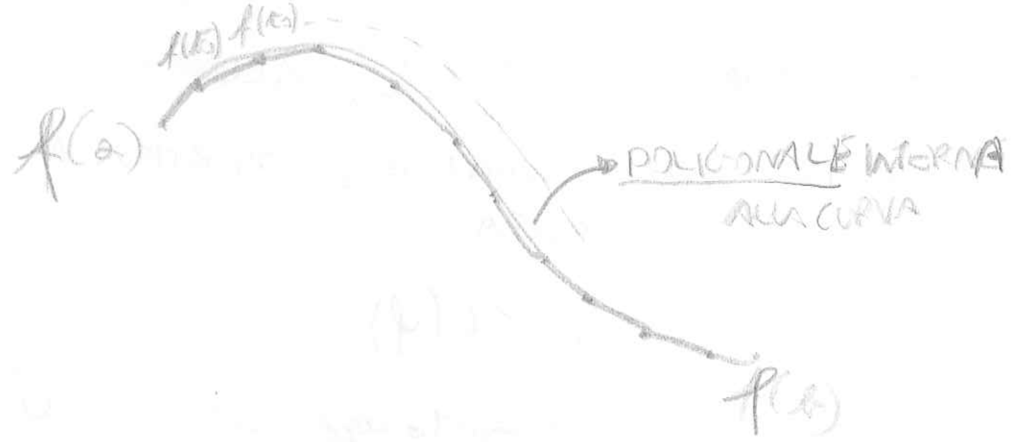
$$\varphi(0) = (x_0,y_0) = P_0,\ \varphi(1) = (x_1,y_1) = P_1$$

SI HA:

$$L(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\,dt = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$ CHE È

PROPRIO LA DISTANZA TRA I DUE PUNTI $\overline{P_0P_1}$

• CONSIDERIAMO LA SEGUENTE CURVA DI CLASSE $\boxed{C^1}$. ④



POSSIAMO PENSARE DI SUDDIVIDERE TALE CURVA IN PARTIZIONI. DICIAMO ALLORA CHE LA CURVA $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ È REGOLARE A TRATTI SE ESISTE UNA PARTIZIONE $\{a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b\}$ DELL'INTERVALLO $[a,b]$ TALE CHE:

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ SI HA CHE } \gamma_i /_{[a_i, a_{i+1}]} \text{ È REGOLARE}$$

CIOÈ CHE LA CURVA RISTRETTA SU UNA PARTIZIONE RISULTI REGOLARE. IN QUESTA SITUAZIONE LA LUNGHEZZA VALE:

$$L(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt = \boxed{\sum_0^{n-1} L(\gamma_i)} = \sum_0^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\gamma_i'(t)|\,dt$$

• DAL PUNTO DI VISTA GEOMETRICO, DATA UNA CURVA $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ CON $f \in C^1([a,b])$ SI PUÒ ASSOCIARE UNA POLIGONALE $\boxed{G}$ INTERNA ALLA CURVA (È UN SEGMENTO) ~~PER OGNI PARTIZIONE~~. LA LUNGHEZZA DI TALE POLIGONALE È:

$$L(G) = \sum_1^N \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}$$

TALE NUMERO APPROSSIMA PER DIFETTO LA $L(f)$. PIÙ PICCOLA È LA LUNGHEZZA DELLE PARTIZIONI, TANTO MIGLIORE SARÀ L'APPROSSIMAZIONE.

TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ DELLE CURVE C^1

SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $f\in C^1([a,b])$. ALLORA

a) PER OGNI POLIGONALE $\boxed{P}$ INSCRITTA NELLA CURVA f RISULTA:

$$L(P)\leq L(f)$$

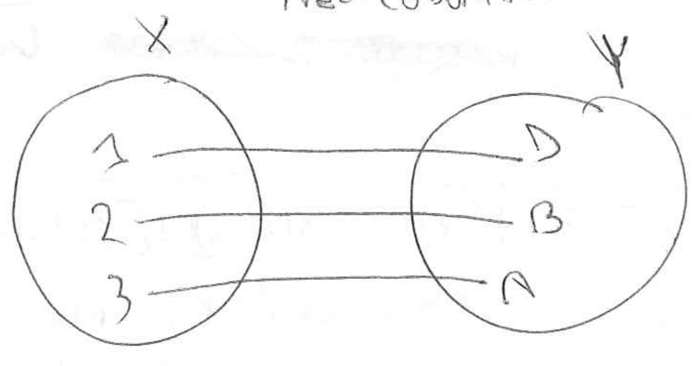
b) PER OGNI $\varepsilon>0$ ESISTE UNA POLIGONALE P_ε INSCRITTA NELLA CURVA PER CUI:

$$L(P_\varepsilon)>L(f)-\varepsilon$$

OVVERO STIAMO AFFERMANDO CHE LA LUNGHEZZA DELLA CURVA f È L'ESTREMO SUPERIORE DI TUTTE LE POSSIBILI POLIGONALI ISCRITTE.

- SI OSSERVA CHE SE L'APPLICAZIONE $f:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ NON È <u>INIETTIVA</u>, LA $L(\gamma)$ NON FORNISCE LA MISURA DEL <u>SOSTEGNO</u> DELLA CURVA f. QUESTO PERCHÈ LA FORMULA DI $L(\gamma)$ TIENE CONTO DI COME E QUANTE VOLTE LA CURVA VIENE PERCORSA.

<u>FUNZIONE INIETTIVA</u> (INGETTIVA): AD ELEMENTI DISTINTI DEL DOMINIO CORRISPONDONO IMMAGINI DISTINTE NEL CODOMINIO



NEL CASO DELLA CURVA $f(t_0)\neq f(t_1)\ \forall t_0,t_1\in[a,b]$

(5)

CURVE EQUIVALENTI E ASCISSA CURVILINEA

- SIA $\overset{\text{FI}}{f}: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ REGOLARE (cioè di CLASSE C^1 e $f'(t) \neq (0,0)$)

  SIA $\underset{\text{PSI}}{\psi}: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ REGOLARE

  LE DUE CURVE SONO EQUIVALENTI SE:

$$\exists\ g: [a, b] \to [\alpha, \beta],\ g \in C^1([a, b]),\ g'(t) \neq 0\ \forall t \in (a, b)$$

  CHE PRENDE IL NOME DI "PARAMETRO AMMISSIBILE" E VALE L'APPLICAZIONE COMPOSTA:

$$f(t) = \psi(g(t))$$

  SI SCRIVE $f \sim \psi$ (f equivalente a ψ).

- POSSIAMO QUINDI SUDDIVIDERE LA FAMIGLIA DELLE CURVE REGOLARI IN "CLASSI DI EQUIVALENZA" IN CUI LE CURVE SONO LEGATE DALLA RELAZIONE DI EQUIVALENZA APPENA DEFINITA.

  SCRIVIAMO:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{CLASSE DI} \\ \text{EQUIVALENZA}}}{\gamma}(\text{GAMMA}) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{INSIEME DELLE} \\ \text{CURVE EQUIVALENTI REGOLARI}}}{[f]}$$

QUINDI γ INDICA LA CLASSE DI EQUIVALENZA, CIOÈ L'INSIEME DELLE CURVE EQUIVALENTI, e CON $\boxed{f(t)}$ INDICHIAMO UN RAPPRESENTANTE DI TALE INSIEME.

AD OGNI MODO CHIAMIAMO γ "CURVA" AL PARI DI OGNI SUA RAPPRESENTAZIONE $f(t)$.

ESEMPIO

LE CURVE:

$$f(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi] = [a, b]$$

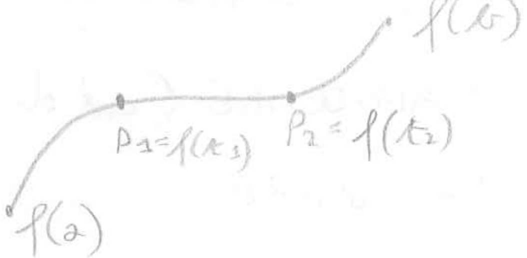
$$\psi(s) = (\cos 2s, \sin 2s),\ s \in [0, \pi] = [\alpha, \beta]$$

è di classe C^1 ed ha $g'(t) \neq 0$!!!

SONO EQUIVALENTI. DIFATTI UTILIZZANDO IL PARAMETRO AMMISSIBILE $g(t) = \frac{t}{2}$

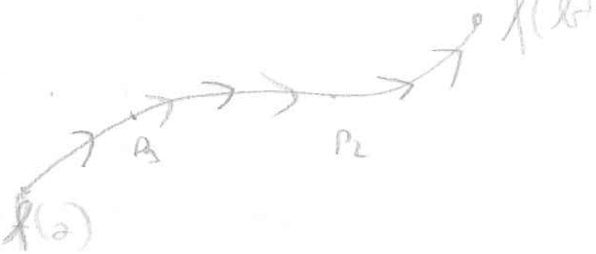
$$\psi(t) = \left(\cos 2 \cdot \frac{t}{2},\ \sin 2 \cdot \frac{t}{2}\right) = (\cos t, \sin t)\quad t \in [0, 2\pi]$$

· INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI <u>ORIENTAMENTO</u>. CONSIDERIAMO UNA CURVA REGOLARE:



IN QUESTA SITUAZIONE, NON ABBIAMO INFORMAZIONI CHE CI PERMETTONO DI DIRE LA DIREZIONE DI PERCORRENZA DELLA CURVA. DEFINIAMO QUINDI QUANTO SEGUE:

DATA $f:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ CURVA REGOLARE, SI DICE CHE IL PUNTO $P_1=f(t_1)$ PRECEDE IL PUNTO $P_2=f(t_2)$ SE $t_1<t_2$. IN QUESTO CASO L'ORIENTAMENTO DELLA CURVA RISULTA:



[CI MUOVIAMO DA $f(t_1)$ VERSO $f(t_2)$]

· DUE <u>CURVE EQUIVALENTI</u> NON NECESSARIAMENTE HANNO LO STESSO ORIENTAMENTO. SI SUDDIVIDE, QUINDI, ULTERIORMENTE LA CLASSE DI EQUIVALENZA $\gamma=[f]$ IN DUE PARTIZIONI CHE TENGONO CONTO DELL'ORIENTAMENTO OLTRE CHE DELL'EQUIVALENZA.

INDICANDO CON:

γ^+ = INSIEME DI TUTTE LE CURVE EQUIVALENTI CON ORIENTAMENTO POSITIVO

γ^- = INSIEME DI TUTTE LE CURVE EQUIVALENTI CON ORIENTAMENTO NEGATIVO

LA CLASSE DI EQUIVALENZA COMPLESSIVA RISULTA $\gamma=\gamma^+\cup\gamma^-$, IN CUI FISSIAMO COME "POSITIVO" e "NEGATIVO" UN CERTO ORIENTAMENTO.

· SE TRA DUE CURVE EQUIVALENTI $\boxed{f}$ e $\boxed{\psi}$ IL CAMBIO DI PARAMETRO $g(t)$ RISULTA AVERE $g'(t)>0$, ALLORA LE DUE CURVE HANNO <u>STESSO ORIENTAMENTO</u>!!!

• DATA UNA CURVA $\gamma = [f]$, SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ UNA RAPPRESENTAZIONE DI QUESTA. FISSIAMO UN PUNTO ARBITRARIO $t_0 \in [a,b]$.

$$\text{SIA } s(t) = \int_{t_0}^{t=b} \|f'(\tau)\|\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\underbrace{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2}_{\text{COMPONENTI DI } f}}\, d\tau$$

OVVERO UNA FUNZIONE CHE RAPPRESENTA LA <u>LUNGHEZZA DI UN TRATTO DI CURVA</u>:

TALE $s(t)$ È UNA FUNZIONE CHE SAPPIAMO ESSERE DERIVABILE (TEOREMA CALCOLO INTEGRALE) ED INOLTRE SAPPIAMO CHE:

$$s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} > 0$$

↓ POICHÉ REGOLARE LA CURVA, LE ~~SUE~~ SUE COMPONENTI $x'(t)$ e $y'(t)$ SONO DIVERSE DA ZERO!!!

PERTANTO $s(t)$ È UN PARAMETRO AMMISSIBILE E LA CURVA EQUIVALENTE OTTENUTA UTILIZZANDO TALE PARAMETRO RISULTA AVERE:

$$\|f'(s)\| = 1 \quad (\text{MODULO VETTORE TANGENTE È } 1)$$

CIOÈ IL <u>VETTORE TANGENTE</u> USANDO $s(t)$ È UN <u>VERSORE</u>. TALE $s(t)$ PRENDE IL NOME DI <u>ASCISSA CURVILINEA</u>.

INTEGRALI CURVILINEI

- DATA $\gamma = [f]$ CURVA, DATA UNA SUA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ E DATA $A : \underset{\text{GAMMA}}{\Gamma} \to \mathbb{R}$ CONTINUA, IN CUI

$\Gamma = f([a, b])$ OVVERO IL <u>SOSTEGNO</u> DI f.

SI DEFINISCE <u>INTEGRALE CURVILINEO</u> DI A ESTESO A <u>GAMMA</u> E SI DENOTA CON:

$$\int_\gamma A \, ds \quad \to \text{CON } ds \text{ INDICANTE L'ASCISSA CURVILINEA}$$

- IL NUMERO:

$$* \int_a^b A(f(t)) \cdot \| f'(t) \| \, dt = \int_a^b A(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt$$

- TALE INTEGRALE È ACCETTABILE POICHÉ f È REGOLARE (LA CLASSE γ CONTIENE TUTTE CURVE REGOLARI) E QUINDI DI CLASSE C^1, LA NORMA È CONTINUA E LA A LO È ANCHE PER IPOTESI. QUINDI LA FUNZIONE INTEGRANDA È TUTTA CONTINUA!!! (LA CONTINUITÀ È NECESSARIA PER L'INTEGRAZIONE).

- INDIPENDENTEMENTE DALLA $f(t)$ CHE SI SCEGLIE, LA DEFINIZIONE NON CAMBIA.

OSSERVAZIONI

(a) IL VALORE DELL'INTEGRALE $*$ È INDIPENDENTE DALLA SCELTA DELLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLA CURVA γ E DAL SUO ORIENTAMENTO.

(b) SE SI CONSIDERA LA RAPPRESENTAZIONE DI $[\gamma]$ CORRISPONDENTE ALLA ASCISSA CURVILINEA:

$$\int_\gamma A \, ds = \int_a^b A(f(s)) \cdot \underbrace{\| f'(s) \|}_{\text{VALE } 1} \, ds = \int_a^b A(f(s)) \, ds$$

(c) SE $f \equiv 1$ (IDENTICAMENTE UGUALE A 1, CIOÈ $f(x) = 1 \ \forall x \in$ I.D.)

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt = L(\varphi)$$

QUINDI LA LUNGHEZZA DI UNA CURVA È <u>INDIPENDENTE</u> DALLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA E DAL VERSO.

PROPRIETÀ INT. CURVILINEI

(a) SIANO $f, g : \Gamma$ (GAMMA) $\to \mathbb{R}$ CONTINUE, $\gamma = [\varphi]$ CURVA.

ALLORA

$$\int_\gamma \alpha f + \beta g \, ds = \alpha \int_\gamma f \, ds + \beta \int_\gamma g \, ds \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(b) $f, g : \Gamma \to \mathbb{R}$ CONTINUE, $f \leq g$. ALLORA $\int_\gamma f \, ds \leq \int_\gamma g \, ds$

(c) $\left| \int_\gamma f \, ds \right| \leq \int_\gamma |f| \, ds \leq \max_\Gamma |f| \cdot L(\gamma)$ → CON f IDENTICAMENTE UGUALE A 1

FORME DIFFERENZIALI

- SIANO $a, b : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUE. SI DICE <u>FORMA DIFFERENZIALE</u> CON COEFFICIENTI $\boxed{a}$ E $\boxed{b}$ LA SCRITTURA:

$$\omega = \omega(x, y) = a(x, y) \, dx + b(x, y) \, dy$$

UNA FORMA DIFFERENZIALE È <u>CONTINUA</u> SE a E b SONO CONTINUE. SI DICE, INVECE, DI CLASSE $C^k(\Omega)$ SE $a, b \in C^k(\Omega)$

LA FORMA DIFF. ω È DEFINITA NELL'INTERSEZIONE DEGLI INSIEMI DI DEFINIZIONE DI $\boxed{a}$ E $\boxed{b}$.

<u>ESEMPIO</u>

$a(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ DEFINITA IN $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\omega = \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx + \text{sen}(xy) \, dy$$

$b(x, y) = \text{sen}\, xy$ DEFINITA IN $\mathbb{R}^2$

LA FORMA <u>ω</u> RISULTA PERTANTO DEFINITA SU $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$!!

· <u>INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE</u> (O DI UNA FORMA ω)

SIA $\omega: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, Ω APERTO (CIOÈ STIAMO DICENDO CHE $a, b: \Omega \to \mathbb{R}$), $\omega \in C(\Omega)$

SIA $\gamma = [\varphi]$ CURVA REGOLARE APPARTENENTE ALL'I.D. DI $\boxed{\omega}$ E FISSIAMO UNA SUA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA $\boxed{\varphi}$ CON VERSO POSITIVO.

SI DICE INTEGRALE ESTESO A $\boxed{\varphi}$ DI ω: ($\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$)

$$\int_\varphi \omega = \int_a^b a(x(t), y(t)) \cdot \underbrace{x'(t)}_{dx} + b(x(t), y(t)) \cdot \underbrace{y'(t)}_{dy} \, dt$$

CIOÈ STO CALCOLANDO I COEFFICIENTI DELLA FORMA DIFFERENZIALE SULLA CURVA!

· L'INTEGRALE DI UNA FORMA DIFFERENZIALE NON DIPENDE DALLA <u>RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA</u> SCELTA MA DIPENDE DAL VERSO DI PERCORRENZA.

DATA γ, e DETTA $-\gamma$ LA CURVA ORIENTATA IN SENSO OPPOSTO SI HA:

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$$

FORME DIFFERENZIALI ESATTE

- SIA $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f DIFFERENZIABILE (CIOÈ AMMETTE DERIVATE PARZIALI) SU Ω. ALLORA POSSIAMO CONSIDERARE IL <u>DIFFERENZIALE DI f</u> DEFINITO COME:

$$df = \underbrace{f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy}_{\text{STESSA SCRITTURA DI } \omega\text{!!!}}$$

CON $a(x,y) = f_x(x,y)$ e $b(x,y) = f_y(x,y)$

IN CUI SE PRENDO:

$$f(x,y) = x \Rightarrow df = dx$$
$$f(x,y) = y \Rightarrow df = dy$$

IL DIFFERENZIALE È UNA FORMA DIFFERENZIALE MA NON SEMPRE È VERO IL CONTRARIO!!!

ESEMPIO

$$\omega(x,y) = \frac{x^2}{3}dx + xy^2 dy$$

IN CUI:

$$a(x,y) = \frac{x^2}{3}, \quad b(x,y) = xy^2$$

SE ESISTE UNA FUNZIONE f DIFFERENZIABILE, SI AVREBBE CHE:

$$df = \omega$$

OVVERO CHE

$$3x^2 = f_x(x,y)$$
$$xy^2 = f_y(x,y)$$

AFFINCHÉ CIÒ SIA PROVATO, DOBBIAMO OTTENERE CHE L'INTEGRALE RISPETTO A <u>X</u> DI <u>$3x^2$</u> SIA UGUALE ALL'INTEGRALE RISPETTO A y DI <u>xy^2</u>:

$$f_x(x,y) = 3x^2 \Rightarrow f(x,y) = 3\int x^2 dx + g(y) \Rightarrow \boxed{x^3 + g(y)}$$
$$f_y(x,y) = xy^2 \Rightarrow f(x,y) = x\int y^2 dy + g(x) \Rightarrow \boxed{\frac{x}{3}\cdot y^3 + g(x)}$$

MA LE DUE ESPRESSIONI OTTENUTE SONO DIVERSE!!! QUINDI ω NON È UN DIFFERENZIALE!!

DA NOTARE L'AGGIUNTA DELLE DUE FUNZIONI $g(y)$ e $g(x)$. ESSE STANNO A INDICARE DEGLI ULTERIORI TERMINI CHE, UNA VOLTA DERIVATI RISPETTO ALLE RISPETTIVE VARIABILI, SPARISCONO. QUANDO SI INTEGRA, PERÒ, BISOGNA TENERNE CONTO.

- SIA $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ FORMA DIFFERENZIALE DEFINITA SU $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

SI DICE CHE ω È ESATTA SE $\exists f$ DEFINITA SU Ω DIFFERENZIABILE $\Downarrow$ QUINDI ESISTONO DERIVATE PARZIALI TALE CHE:

$$df = \omega \left(\begin{array}{l} \text{cioè } a(x,y) = f_x(x,y) \\ b(x,y) = f_y(x,y) \end{array} \right)$$

- SE $\boxed{\omega}$ È ESATTA f SI DICE PRIMITIVA O POTENZIALE DI $\boxed{\omega}$.

RISULTA CHE TUTTE LE FUNZIONI $f+c$ CON $c \in \mathbb{R}$ SONO PRIMITIVE.

INFATTI:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f+c) = \frac{\partial f}{x} = a$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f+c) = \frac{\partial f}{y} = b$$

- SE f e g È DEFINITE SU UN Ω APERTO E CONNESSO (UN INSIEME È CONNESSO QUANDO NON SI PUÒ SCRIVERE COME UNIONE DI DUE DISGIUNTI), SONO DUE PRIMITIVE DI $\boxed{\omega}$, ALLORA $\exists c$ t.c. $\boxed{f - g = c}$

INFATTI SE SONO ENTRAMBE PRIMITIVE SI HA:

$$df = dg = \omega$$

QUINDI

$$d(f-g) = df - dg = \omega - \omega = 0$$

OVVERO I COEFFICIENTI DI TALE DIFFERENZIALI SONO NULLI. MA I COEFF. SONO LE DERIVATE PARZIALI DELLA FUNZIONE $(f-g)$ QUINDI:

$$\frac{d(f-g)}{dx} = 0, \quad \frac{d(f-g)}{dy} = 0$$

PER IL TEOREMA SULLE DERIVATE PARZIALI NULLE SU INSIEMI CONNESSI (SE UNA FUNZIONE DEFINITA SU UN APERTO CONNESSO HA DERIVATE PARZIALI NULLE È UNA COSTANTE) SI HA:

$$f - g = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(9) IMMAGINIAMO DI AVERE UN PIANO E DUE PUNTI P_1 e P_2 APPARTENENTI A TALE PIANO:

- INDICHIAMO CON $\Phi(P_1, P_2)$ L'INSIEME DELLE CURVE REGOLARI A TRATTI CON SOSTEGNO IN Ω CONGIUNGENTI P_1 e P_2 DAL VERSO DI P_1 IN DIREZIONE DI P_1.
- CON $\Phi(P_2, P_1)$ INVECE, INDICHIAMO LE CURVE CON VERSO DA $\boxed{P_2 \text{ a } P_1}$.

TEOREMA DI INTEGRAZIONE DELLE FORME DIFFERENZIALI ESATTE

SIA $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA E CONTINUA SU $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO, SIA A UN POTENZIALE DI ω E CONSIDERIAMO DUE PUNTI P_1 e $P_2 \in \Omega$. ALLORA:

$$\int_\gamma \omega = A(P_2) - A(P_1), \ \forall \gamma \in \Phi(P_1, P_2)$$

CON $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $A: \Omega \to \mathbb{R}$, $A(\gamma(t)) = A(x(t), y(t))$

DIMOSTRAZIONE

CONSIDERIAMO $\gamma \in \Phi(P_1, P_2)$. SI HA:

$$\int_\gamma \omega \underbrace{=}_{\substack{\text{POICHÉ } \omega \text{ ESATTA} \\ \omega = dA = A_x dx + A_y dy}} \int_a^b A_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + A_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \, dt =$$

PRODOTTO SCALARE: SOMMA DELLE COMPONENTI OMOLOGHE

$$= \int_a^b \nabla A(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) \, dt =$$

CONSIDERANDO:

$$f: \Omega \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$\gamma: I \to \mathbb{R}^2, \quad \underbrace{\gamma(I) \subseteq \Omega}$$

SOSTEGNO CONTENUTO IN OMEGA

FISSATA LA FUNZIONE COMPOSTA

$$F(t) = f(\gamma(t))$$

PER IL TEOREMA SULLE FUNZIONI COMPOSTE SAPPIAMO CHE:

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

CHE È PROPRIO CIÒ CHE ABBIAMO NELLA FUNZIONE INTEGRANDA!!! PER CUI SCRIVIAMO:

$$= \int_a^b \underbrace{\frac{d\, f(x(t), y(t))}{dt}}_{F'(t)}\, dt = \left[f(x(t), y(t)) \right]_a^b =$$

PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (f è CONTINUA POICHÉ PRIMITIVA) QUINDI DIFFERENZIABILE

$$= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) =$$
$$= \underbrace{f(P_2) - f(P_1)}_{\text{DIFF. DI POTENZIALE!!}} \text{!!!} \quad \text{con } \gamma \in \Phi(P_1, P_2)$$

- OSSERVAZIONI →
  a) L'INTEGRALE CURVILINEO DI UNA FORMA DIFF. ESATTA NON DIPENDE DAL PERCORSO SCELTO MA SOLO DAGLI ESTREMI E DAL VERSO DI PERCORRENZA
  b) SE γ è UNA CURVA CHIUSA e ω è ESATTA, SI HA CHE $\int_\gamma \omega = 0$ (POICHÉ $\gamma(a) = \gamma(b)$)

IN GENERALE, SE SI TROVA **UNA** CURVA CHIUSA t.c. $\int_\gamma \omega \neq 0$ SI PUÒ AFFERMARE CHE ω NON È ESATTA.

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLE FORME DIFF. ESATTE

SIA Ω APERTO, CONNESSO DI $\mathbb{R}^2$. SIA $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$, $a, b \in C(\Omega)$

SONO EQUIVALENTI LE SEGUENTI PROPOSIZIONI:

1) ω è ESATTA
2) $\forall \gamma$ CURVA CHIUSA REGOLARE A TRATTI CON SOSTEGNO IN Ω RISULTA $\int_\gamma \omega = 0$
3) COMUNQUE SI PRENDA UN PUNTO P_1 e P_2 ($\forall P_1, P_2 \in \Omega$) E QUALUNQUE γ_1 e $\gamma_2 \in \Phi(P_1, P_2)$ SI HA CHE:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

DIMOSTRAZIONE

OSSERVIAMO PRELIMINARMENTE CHE SE Ω È CONNESSO DI $\mathbb{R}^2$ ALLORA Ω È ANCHE CONNESSO PER POLIGONALI e PER ARCHI, QUINDI

$\Phi(P_1, P_2) \neq \emptyset \quad \forall P_1, P_2 \in \Omega$

↳ C'È SICURAMENTE UNA CURVA CHE UNISCE I DUE PUNTI

- VEDIAMO CHE $1 \Rightarrow 2$.

PER IL TEOREMA DI INTEGRAZIONE DELLE FORME DIFF. ESATTE SI HA:

$$\int_\gamma \omega = f(P_2) - f(P_1)$$

POICHÉ $P_1 = P_2$ ALLORA $\boxed{\int_\gamma \omega = 0}$

- VEDIAMO CHE $2 \Rightarrow 3$

SIANO $P_1, P_2 \in \Omega$, CONSIDERIAMO $\gamma_1, \gamma_2 \in \Phi(P_1, P_2)$

PONGO $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$

TALE γ È UNA CURVA CHIUSA, REGOLARE A TRATTI, CON SOSTEGNO IN Ω e QUINDI SODDISFA LE IPOTESI DELLA 2 !!! PERTANTO HO:

$$\int_\gamma \omega = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

VEDIAMO CHE (3) $\Rightarrow$ (1)

DIMOSTRIAMO CHE ESISTE UNA f PRIMITIVA DI ω PER CUI $a = f_x$, $b = f_y$.

FISSIAMO UN PUNTO $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$

E CONSIDERIAMO UN PUNTO GENERICO $P = (x, y) \in \Omega$

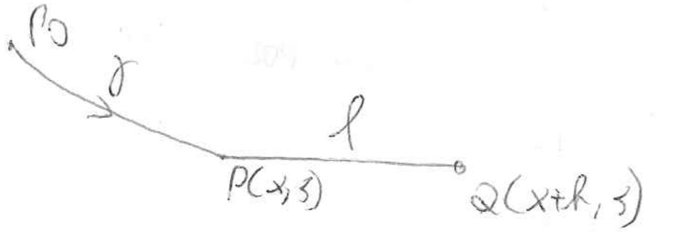
FISSIAMO:

$$f(x,y) = \int_\gamma \omega \quad , \gamma \in \mathcal{L}(P_0, P)$$

$\downarrow$

TALE FUNZIONE È BEN DEFINITA OVVERO NON HO DIPENDENZA DALLA CURVA CHE SCELGO. IN UN PUNTO, QUALUNQUE CURVA MI DA LO STESSO RISULTATO

VEDIAMO CHE QUESTA $f(x,y)$ È UNA PRIMITIVA. CALCOLO LE DERIVATE PARZIALI.



SIA $h > 0$ t.c. $(x+h, y) \in \Omega$.

CONSIDERO:

$$\underbrace{f(x+h,y)}_{\text{MI SPOSTO RISPETTO A } \boxed{x}} - f(x,y) = \int_{\gamma_1} \omega - \int_\gamma \omega$$

DOVE $\gamma_1 = \gamma \cup \ell$

e $\ell(t) = \underbrace{(x+t, y)}_{\text{ESPRESSIONE PARAMETRICA DI } \ell}$ con $t \in [0, h]$

ALLORA RISULTA:

$$f(x+h,y) - f(x,y) = \int_{\gamma \cup \ell} \omega - \int_\gamma \omega = \cancel{\int_\gamma \omega} + \int_\ell \omega - \cancel{\int_\gamma \omega} =$$

$$= \int_\ell \omega = \int_0^h a(x+t,y) \cdot \underbrace{1}_{\frac{d(x+t)}{dt}} \, dt + \int_0^h \cancel{b(x+t,y)} \cdot \underbrace{0}_{\frac{dy}{dt}} \, dt \Rightarrow$$

$\leftarrow$ NON HO INCREMENTATO DI $\boxed{y}$

$$\Rightarrow f(x+h,y) - f(x,y) = \int_0^h a(x+t,y) \, dt$$

(1) PER IL TEOREMA DELLA MEDIA, ESISTE UN PUNTO NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE PER CUI:

$$\exists \xi_{(x,y)} \in [0,h] \text{ t.c.}$$

$$\int_0^h a(x+t, y)\, dt = (h-0)\cdot a(x+\xi, y)$$

SI OTTIENE QUINDI CHE:

$$f(x+h, y) - f(x,y) = h\cdot a(x+\xi, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} = a(x+\xi, y)$$

PASSANDO AL LIMITE PER $h \to 0$, IL PRIMO MEMBRO È PROPRIO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x ed IL SECONDO MEMBRO DIVENTA $a(x,y)$ POICHÉ SE $h \to 0$ ANCHE $\xi \to 0$. SI HA QUINDI:

$$\exists f_x(x,y) = a(x,y)$$

CON ANALOGO PROCEDIMENTO $\left(f(x, y+h) - f(x,y)\right)$ SI HA:

$$\exists f_y(x,y) = b(x,y)$$

VISTO CHE $\boxed{a}$ e $\boxed{b}$ SONO CONTINUE

- QUINDI POICHÉ ESISTONO LE DERIVATE PARZIALI DI f E SONO CONTINUE, PER IL TEOREMA DEL DIFF. TOTALE f È DIFFERENZIABILE. PERTANTO f È UNA PRIMITIVA CON CUI RISULTA:

$$df = \omega$$

FORME DIFF. CHIUSE

SIA $\omega \in C^1(\Omega)$, SIA $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$

SUPPONIAMO CHE $\boxed{\omega}$ SIA ESATTA, CIOÈ $\exists f$ DIFFERENZIABILE t.c. $df = \omega$.

HO QUINDI CHE:

$$a(x,y) = f_x(x,y)$$
$$b(x,y) = f_y(x,y)$$

POICHÉ PER IPOTESI $\omega \in C^1(\Omega)$, SIGNIFICA CHE ESISTONO LE DERIVATE SECONDE DI f e SONO CONTINUE ($f \in C^2(\Omega)$).

OTTENGO:

$$\frac{\partial}{\partial y} a(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} b(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y)$$

ESSENDO $f \in C^2(\Omega)$ SI HA PER IL TEOREMA DI SCHWARTZ CHE

$$\frac{\partial}{\partial y} a(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} b(x,y)$$

E CON QUESTA RELAZIONE SODDISFATTA SI DICE CHE ω è CHIUSA.

- SE $\omega \in C^1(\Omega)$, ALLORA ω ESATTA $\Rightarrow$ $\boxed{\omega \text{ CHIUSA}}$
(SE ω è ESATTA è ANCHE CHIUSA)

ESEMPIO

$$\omega = 3x^2 dx + xy^2 dy$$

NON C'È CHIUSURA $\rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2$ SONO DIVERSE!!! QUINDI POSSO DIRE CHE ω NON È ESATTA

- PERÒ SE UNA FORMA È CHIUSA NON È SEMPRE ESATTA!!

$$\omega \text{ CHIUSA} \not\Rightarrow \omega \text{ ESATTA}$$

ESEMPIO

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

LA FORMA È DEFINITA SU $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. VERIFICO SE LA FORMA È CHIUSA.

$$a(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad b(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$a_y(x,y) = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$b_x(x,y) = \frac{1(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

POICHÉ $a_y(x,y) = b_x(x,y)$ LA FORMA È CHIUSA, VEDIAMO CHE PERÒ NON RISULTA ESATTA IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. PER IL TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELLE FORME ESATTE DEVO AVERE CHE:

$$\int_\gamma \omega = 0 \quad \text{con } \gamma \text{ CHIUSA, REGOLARE A TRATTI}$$

CONSIDERO COME CURVA CHIUSA REGOLARE A TRATTI LA CIRCONFERENZA UNITARIA:

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma a(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + b(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{\operatorname{sen} t}{\underbrace{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{1}} \cdot (-\operatorname{sen} t) + \frac{\cos t}{\underbrace{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{1}} \cdot (\cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{+\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}_{1}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = \big[t\big]_0^{2\pi} = \boxed{2\pi}$$

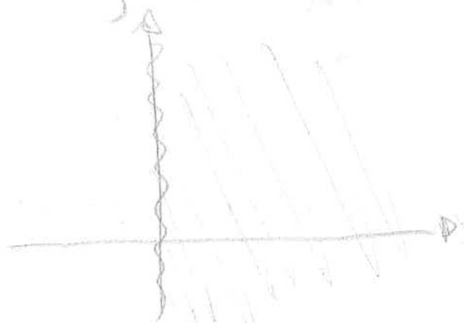
POICHÉ RISULTA CHE $\exists\, \gamma(t)$ CHIUSA REGOLARE A TRATTI PER CUI

$$\int_\gamma \omega \neq 0$$

LA FORMA <u>NON È ESATTA</u>!! LA NON ESATTEZZA RIGUARDA IL SUO INSIEME DI DEFINIZIONE. È LECITO PERÒ CONSIDERARE DEI SOTTOINSIEMI DI Ω IN CUI È INVECE <u>ESATTA</u>!!

AD ESEMPIO CONSIDERANDO UNA RESTRIZIONE DI OMEGA SU UN INSIEME A $\left(\omega/_A\right)$ COSÌ DEFINITO:

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \}$$



SI PUÒ VERIFICARE CHE $\boxed{\omega}$ È ESATTA. INFATTI CONSIDERIAMO LA FUNZIONE:

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c$$

CHE RISULTA DI CLASSE $C^1(A)$ E QUINDI DIFFERENZIABILE.

SI VERIFICA CHE:

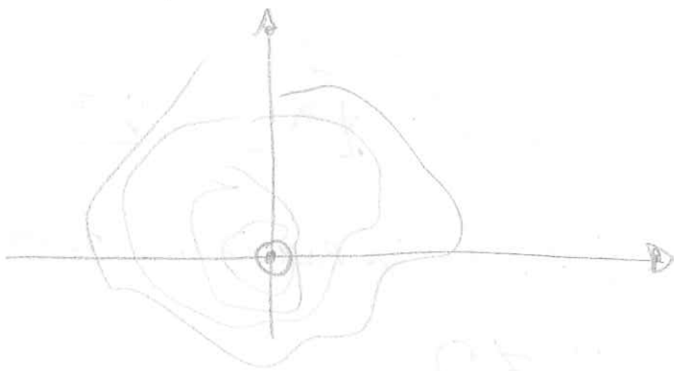
$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2} = a(x, y)$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1/x}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = b(x, y)$$

PERTANTO A È UNA PRIMITIVA DI $|\omega|$!!!

- CERCHIAMO DI SPIEGARE IN MODO INTUITIVO PERCHÈ LA CHIUSURA PUÒ RISULTARE INSUFFICIENTE PER L'ESATTEZZA.

SI IMMAGINI UN ELASTICO CHE CIRCONDA UN PUNTO NON INCLUSO NEL NOSTRO INSIEME DI DEFINIZIONE. TALE ELASTICO HA LA CAPACITÀ DI DEFORMARSI E RESTRINGERSI SEMPRE PIÙ, FINO A COINCIDERE CON IL PUNTO NON INCLUSO NEL NOSTRO INSIEME.



PERTANTO PUR CONSIDERANDO CURVE CHIUSE DIVERSE, CE NE SARÀ SICURAMENTE UNA CHE FINIRÀ PER COINCIDERE CON IL NOSTRO PUNTO.

SI POTRÀ AVERE SICUREZZA SULL'ESATTEZZA DELLA FORMA SOLO SE SONO SODDISFATTE DELLE PRECISE PROPRIETÀ TOPOLOGICHE DEL NOSTRO INSIEME DI DEFINIZIONE. IN QUESTI CASI, LA CHIUSURA È SUFFICIENTE PER L'ESATTEZZA.

QUINDI:

$$\omega \text{ CHIUSA} \not\Rightarrow \omega \text{ ESATTA}$$

MA IN ALCUNI CASI $\omega \in C^1(\Omega)$ SE CHIUSA È ANCHE ESATTA.

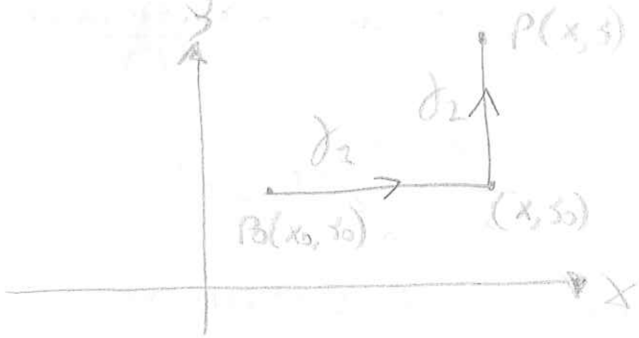
(13) TEOREMA DELLE FORME ESATTE SUI RETTANGOLI

SIA $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$, $\omega \in C^1(R)$ FORMA DIFF. <u>CHIUSA</u> CON
$R =]a,b[\times]c,d[$

↳ RETTANGOLO. EVENTUALMENTE a, b, c, d POSSONO ASSUMERE VALORI
($-\infty$, $+\infty$ VENENDO COSÌ A FAR COINCIDERE $\boxed{R=\mathbb{R}^2}$.)

ALLORA <u>ω RISULTA ESATTA</u>

DIM CONSIDERIAMO LA SEGUENTE SITUAZIONE:



CONSIDERIAMO:

$$f(x,y) = \int_\gamma \omega \quad \text{con } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

IN CUI

$$\gamma_1(t) = (t, y_0), \quad t \in [x_0, x]$$
$$\gamma_2(t) = (x, t), \quad t \in [y_0, y]$$

SI HA CHE:

$$f(x,y) = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\,dt + \underset{\substack{\downarrow \\ b(t,y)\text{ È NULLO POICHÉ } y \\ \text{NON VARIA}}}{\emptyset} +$$

$$+ \underset{\substack{\downarrow \\ a(x,t)\text{ È NULLO} \\ \text{POICHÉ } x \text{ NON} \\ \text{VARIA!!!}}}{\emptyset} + \int_{y_0}^{y} b(x,t)\,dt$$

QUINDI

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} b(x,t)\,dt$$

PER PROVARE CHE ω È ESATTA, DEVO AVERE CHE:

$$f_x(x,y) = a(x,y)$$

$$f_y(x,y) = b(x,y)$$

- CALCOLO LE DERIVATE PARZIALI DI f:

$$f_x(x,y) = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} a(t,y_0)\,dt\right)}_{a} + \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_{y_0}^{y} b(x,t)\,dt\right)}_{b}$$

IL TERMINE a PER IL TEOREMA DI ESISTENZA DELLE PRIMITIVE RISULTA: (a $a(x,y)$ è CONTINUA, ALLORA ESISTE)

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} a(t,y_0)\,dt\right) = a(x,y_0)$$

IL TERMINE b SI OTTIENE APPLICANDO IL LEMMA SEGUENTE:

SIA $g \in C^1([a,b]\times[c,d])$

SIA $G(x) = \int_c^d g(x,t)\,dt$

ALLORA

$$\exists\, G'(x) = \int_c^d g_x(x,t)\,dt$$

QUINDI

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{y_0}^{y} b(x,t)\,dt\right) = \int_{y_0}^{y} b_x(x,t)\,dt$$

MA POICHÉ ω è CHIUSA RISULTA $b_x(x,t) = a_y(x,t)$ E SI HA:

$$f_x(x,y) = a(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} a_y(x,t)\,dt = a(x,y_0) + \left[a(x,t)\right]_{y_0}^{y} =$$

$$= \cancel{a(x,y_0)} + a(x,y) - \cancel{a(x,y_0)} = \boxed{a(x,y)}$$

- PER f_y SI HA:

$$f_y(x,y) = \underbrace{\frac{d}{dy}\left(\int_{x_0}^{x} a(t,y_0)\,dt\right)}_{\text{NULLO POICHÉ } y \text{ NON VARIA}} + \frac{d}{dy}\left(\int_{y_0}^{y} b(x,t)\,dt\right) =$$

$$= \boxed{b(x,y)}$$

- RICORDANDO CHE UN DOMINIO $D \subseteq \mathbb{R}^2$ RAPPRESENTA LA CHIUSURA DI UN APERTO LIMITATO ($D = A \cup \partial A$)

$\partial A \to$ PUNTI DI FRONTIERA DI A

DICIAMO CHE:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ È SEMPLICEMENTE CONNESSO SE $\forall \gamma$ CHIUSA, REGOLARE A TRATTI CON SOSTEGNO IN Ω, γ È LA FRONTIERA DI UN DOMINIO LIMITATO CONTENUTO IN Ω.

IN ALTRE PAROLE, Ω NON HA $\boxed{\text{BUCHI}}$.

- TEOREMA FORME DIFFERENZIALI IN UN APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO

SIA $\omega \in C^1(\Omega)$, Ω SEMPLICEMENTE CONNESSO. ALLORA

ω CHIUSA $\Rightarrow$ ESATTA

OSS $\mathbb{R}^2$, semipiani, cerchi, quadrati | SONO SEMPLICEMENTE CONNESSI

OSS DATA ω, STUDIARE SIGNIFICA:

1. DETERMINARE L'ID
2. VERIFICARE SE È CHIUSA. SE NON LO CHE STOP.
3. STABILIRE SE È ESATTA USANDO LA "GEOMETRIA" DEL DOMINIO
4. SE È ESATTA, CALCOLARE LE PRIMITIVE.