① 22/08/2011 - 10.30/13.00 - Pag. 207 a 267

LIBRO CAP. 6 | FUNZIONI DI DUE VARIABILI |

- INTRODUZIONE

- CON IL SIMBOLO $\mathbb{R}^2$ SI INDICA L'INSIEME DELLE COPPIE ORDINATE DI NUMERI REALI:

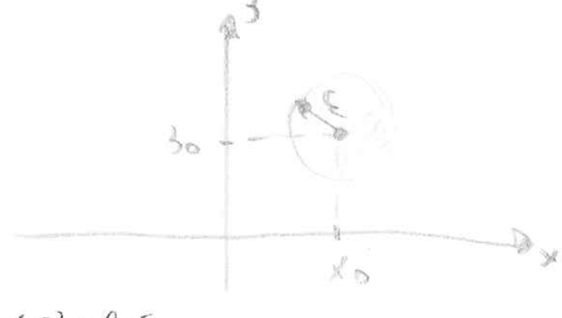
$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

ESTENDIAMO A TALE TIPO DI INSIEME ALCUNI CONCETTI GIÀ DEFINITI A PROPOSITO DELL'INSIEME $\mathbb{R}$ COME INTORNO, PUNTO DI ACCUMULAZIONE E DI INTERVALLI APERTI, CHIUSI, LIMITATI E ILLIMITATI.

- INTORNO CIRCOLARE

SI CHIAMA INTORNO CIRCOLARE DI UN PUNTO $\boxed{P}$ DI RAGGIO $\boxed{\varepsilon > 0}$ L'INSIEME DEI PUNTI DEL PIANO LA CUI DISTANZA DA $\boxed{P}$ È MINORE DI $\boxed{\varepsilon}$, OVVERO I PUNTI SODDISFACENTI LA DISUGUAGLIANZA:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

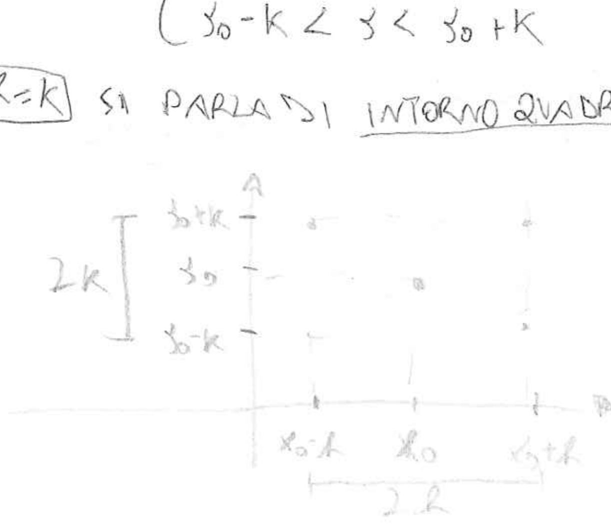


- INTORNO RETTANGOLARE

SI CHIAMA INTORNO RETTANGOLARE DI UN PUNTO $\boxed{P(x_0, y_0)}$ DI DIMENSIONI $\boxed{2k}$ e $\boxed{2h}$ L'INSIEME DEI PUNTI PER CUI VALGONO LE DISEQUAZIONI:

$$\begin{cases} x_0 - h < x < x_0 + h \\ y_0 - k < y < y_0 + k \end{cases}$$

QUANDO $\boxed{h = k}$ SI PARLA DI INTORNO QUADRATO.



LA SCELTA DI UNO DEI DUE TIPI DI INTORNI È ARBITRARIA E VIENE FATTA IN BASE A CRITERI DI CONVENIENZA DI CALCOLO

- PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

DATO UN INSIEME $A \subseteq \mathbb{R}^2$, SI DICE CHE UN PUNTO $\boxed{P \in A}$ È INTERNO AD $\boxed{A}$ SE ESISTE UN INTORNO DI $\boxed{P}$ CONTENUTO IN $\boxed{A}$.

- SI DICE CHE UN PUNTO $\boxed{P \notin A}$ È ESTERNO AD $\boxed{A}$ SE ESISTE UN INTORNO DI $\boxed{P}$ CHE NON CONTIENE PUNTI DI $\boxed{A}$.

- SI DICE CHE UN PUNTO $\boxed{P}$ È UN PUNTO DI FRONTIERA DI $\boxed{A}$ SE IN OGNI INTORNO DI $\boxed{P}$ CADONO SIA PUNTI CHE NON APPARTENGONO AD $\boxed{A}$ CHE PUNTI CHE APPARTENGONO. L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI DI FRONTIERA SI CHIAMA FRONTIERA.

- SI DICE CHE UN PUNTO $\boxed{P \in A}$ È UN PUNTO ISOLATO DI $\boxed{A}$ SE ESISTE UN INTORNO DI $\boxed{P}$ CHE NON CONTIENE ALTRI PUNTI DI $\boxed{A}$ ALL'INFUORI DI $\boxed{P}$ STESSO. PERTANTO OGNI PUNTO ISOLATO DI UN INSIEME $\boxed{A}$ È ANCHE UN PUNTO DI FRONTIERA.

$\boxed{P}$ È UN PUNTO INTERNO AD $\boxed{A}$

$\boxed{Q}$ È UN PUNTO ESTERNO AD $\boxed{A}$

$\boxed{R}$ È UN PUNTO DI FRONTIERA DI $\boxed{A}$

$\boxed{S}$ È UN PUNTO ISOLATO ($\boxed{S \in A}$ ma C'È UN INTORNO CHE NON CONTIENE PUNTI DI A A PARTE $\boxed{S}$ STESSO)

INSIEMI APERTI, INSIEMI CHIUSI

- UN INSIEME DI PUNTI SI DICE APERTO SE TUTTI I SUOI PUNTI SONO PUNTI INTERNI. IN ALTRI TERMINI, È UN INSIEME CHE NON CONTIENE ALCUN PUNTO DELLA PROPRIA FRONTIERA.
- UN INSIEME SI DICE, INVECE, CHIUSO UN INSIEME CHE CONTIENE TUTTA LA PROPRIA FRONTIERA.
- UN INSIEME CHE CONTIENE ALCUNI PUNTI DELLA PROPRIA FRONTIERA, MA NON TUTTI ~~SE~~ È DETTO "NÈ CHIUSO, NÈ APERTO".

INSIEMI LIMITATI, INSIEMI ILLIMITATI

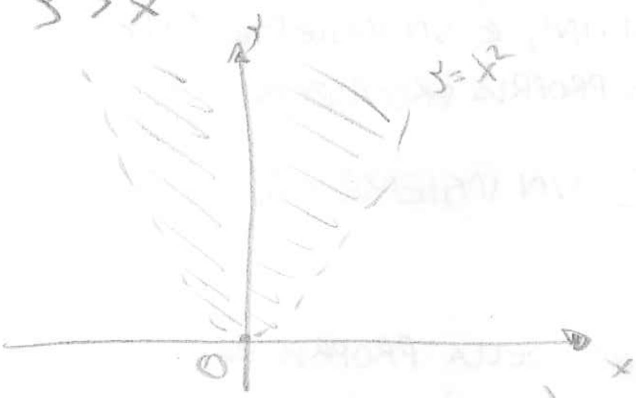
- UN INSIEME $\boxed{A}$ SI DICE LIMITATO SE ESISTE UN INTORNO DELL'ORIGINE CHE LO CONTIENE. UN INSIEME FINITO È SICURAMENTE LIMITATO.
- UN INSIEME SI DICE ILLIMITATO SE COMUNQUE SI SCELGA UN INTORNO DELL'ORIGINE, VI SONO PUNTI CHE NON APPARTENGONO AD $\boxed{A}$.

PUNTI DI ACCUMULAZIONE

- $\boxed{P}$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $\boxed{A}$ SE OGNI INTORNO DI $\boxed{P}$ CONTIENE ALMENO UN PUNTO DI $\boxed{A}$ DISTINTO DA $\boxed{P}$.
- SE $\boxed{P}$ È UN PUNTO INTERNO AD $\boxed{A}$, $\boxed{P}$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $\boxed{A}$.
- SE $\boxed{P}$ È UN PUNTO DI FRONTIERA NON ISOLATO DI $\boxed{A}$, $\boxed{P}$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE.
- I SOLI PUNTI DI UN INSIEME $\boxed{A}$ CHE NON SONO DI ACCUMULAZIONE SONO I PUNTI ISOLATI.

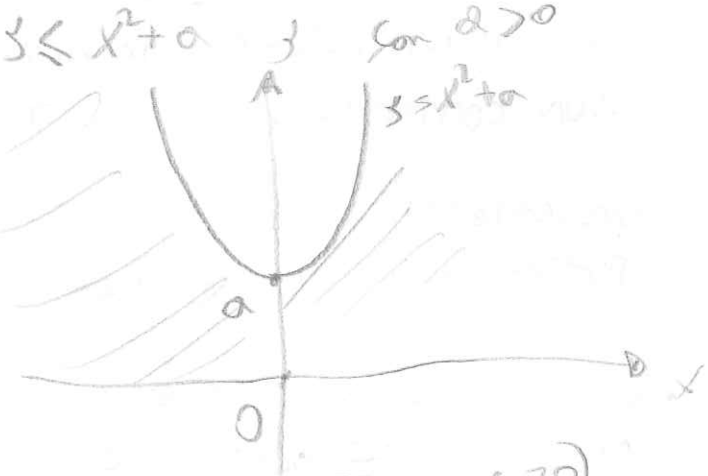
ALCUNI DOMINI ELEMENTARI IN $\mathbb{R}^2$

$y > x^2$



(INSIEME APERTO E ILLIMITATO)

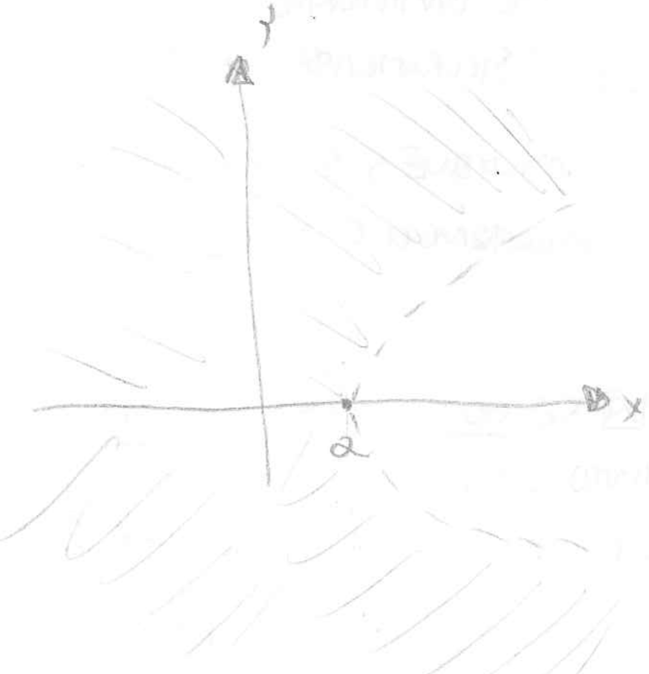
$y \leq x^2 + a$ con $a > 0$



(INSIEME CHIUSO E ILLIMITATO)

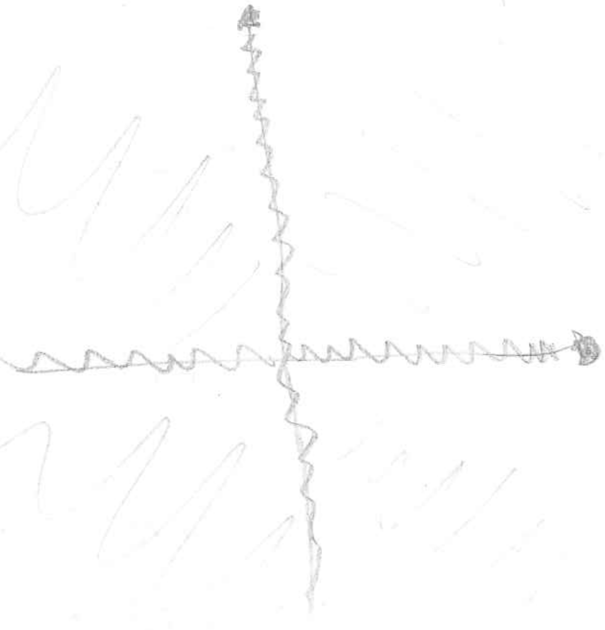
$(x - y^2 + a < 0)$

$x < y^2 + a$ con $a > 0$



(APERTO E ILLIMITATO)

$x \neq 0 \wedge y \neq 0$



(APERTO E ILLIMITATO)

③ · FUNZIONI DI DUE VARIABILI

UNA FUNZIONE REALE DI DUE VARIABILI REALI È UNA LEGGE $\boxed{f}$ DI NATURA QUALSIASI, CHE PERMETTE DI ASSOCIARE, AD OGNI COPPIA DI NUMERI REALI $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ UN NUMERO REALE:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

oppure

$$z = F(x, y)$$

- IL NUMERO REALE $\boxed{z}$ SI DICE IMMAGINE DELLA COPPIA (x, y). VICEVERSA LA COPPIA ORDINATA SI DICE CONTROIMMAGINE.
- UNA FUNZIONE f È DOTATA DI ESPRESSIONE ANALITICA SE L'IMMAGINE DI UNA COPPIA ORDINATA DI NUMERI REALI SI OTTIENE MEDIANTE UN NUMERO FINITO DI OPERAZIONI MATEMATICHE.
- DOMINIO E CODOMINIO

IL DOMINIO $\boxed{D}$ DI UNA FUNZIONE f DI DUE VARIABILI È L'INSIEME DI TUTTE LE COPPIE ORDINATE (x, y) PER LE QUALI È POSSIBILE DETERMINARE IL VALORE $f(x, y)$.

IL CODOMINIO, INVECE, È L'INSIEME FORMATO DAI VALORI DI $\boxed{z}$ CHE HANNO ALMENO UNA CONTROIMMAGINE $(x, y) \in D$.

- LA DETERMINAZIONE DEL DOMINIO DI UNA f SI RICONDUCE SPESSO ALLA RISOLUZIONE DI EQUAZIONI, DISEQUAZIONI O SISTEMI IN DUE VARIABILI.

RESTRIZIONE DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI AD UNA CURVA

- IN MOLTI CASI RISULTA UTILE CONSIDERARE LA <u>RESTRIZIONE</u> DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI AD UN SOTTOINSIEME DEL SUO DOMINIO COSTITUITO DA <u>UNA CURVA</u>.
- SE DI TALE CURVA γ(F1) SONO NOTE LE EQ. PARAMETRICHE:

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \quad t \in D_0$$

DOVE $\boxed{t}$ È UN NUMERO REALE VARIABILE NEL DOMINIO $\boxed{D_0}$, I VALORI CHE f ASSUME IN PUNTI DI $\boxed{\gamma}$ POSSONO ESSERE ESPRESSI IN FUNZIONE DI $\boxed{t}$.

$$z = \varphi(t) = f(g(t), h(t))$$

- NEL CASO IN CUI LA CURVA $\boxed{\gamma}$ HA UN'EQUAZIONE ESPLICITATA RISPETTO AD UNA DELLE VARIABILI x, y e CIOÈ:

$$y = g(x)$$
$$x = h(y)$$

NON È NECESSARIO RICORRERE ALLA VARIABILE t:

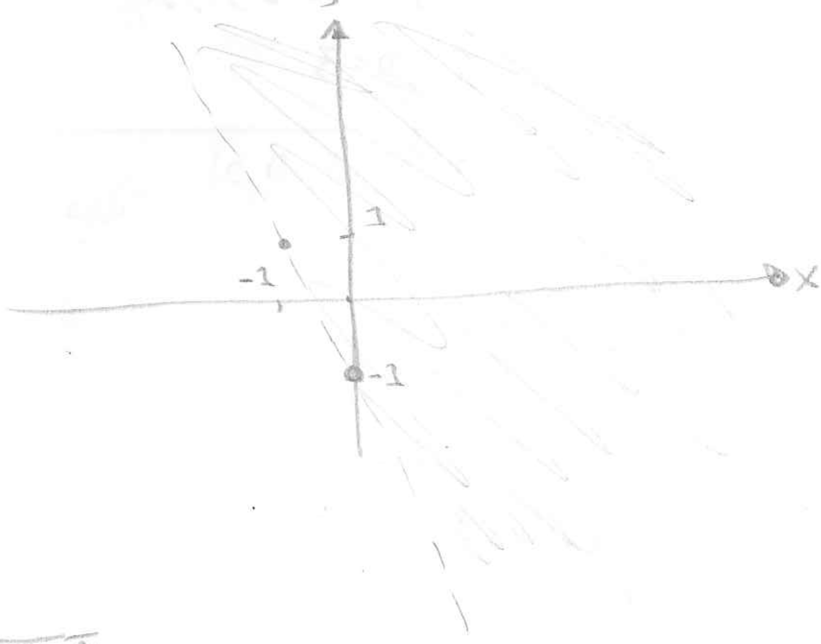
$$z = \varphi(x) = f(x, g(x))$$

Esercizi DOMINIO pag. 641

① $z = \log(y+2x+1)$

$y+2x+1 > 0 \Rightarrow y > -2x-1$

x	y
0	-1
-1	1



② $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+y^2 \geq 0$ sempre verificata!!

LA SOLUZIONE È:

$D = \mathbb{R}^2$

③ $z = \sqrt{y - \frac{1}{x}}$

MINIMO COMUNE MULTIPLO!! ← $\begin{cases} y - \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{xy-1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

① $xy-1 \geq 0 \Rightarrow xy \geq 1$

② $x > 0$

$F(2,1) = \frac{2\cdot 1-1}{2} = \frac{1}{2} > 0$!!

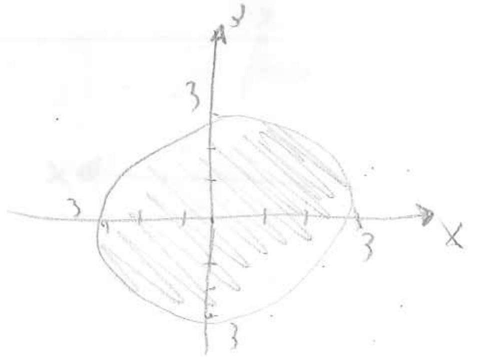
$F(-2,-1) = \frac{+2-1}{-2} = \frac{1}{-2} < 0$!!

(4) $z=\sqrt{\log_{1/10}(x^2+y^2-8)}$

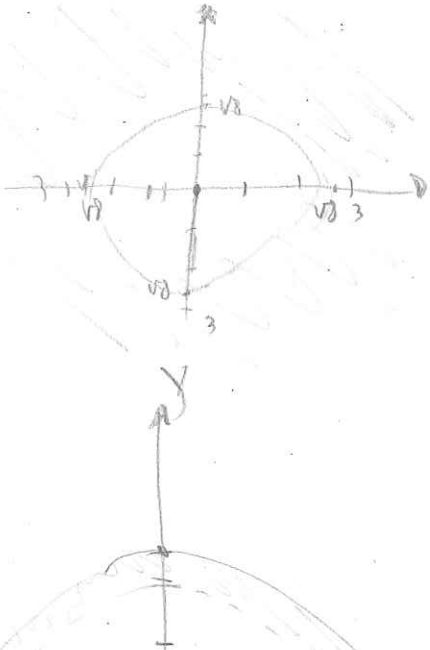
$$\begin{cases}\log_{1/10}(x^2+y^2-8)\geq 0\\ x^2+y^2-8>0\end{cases}$$

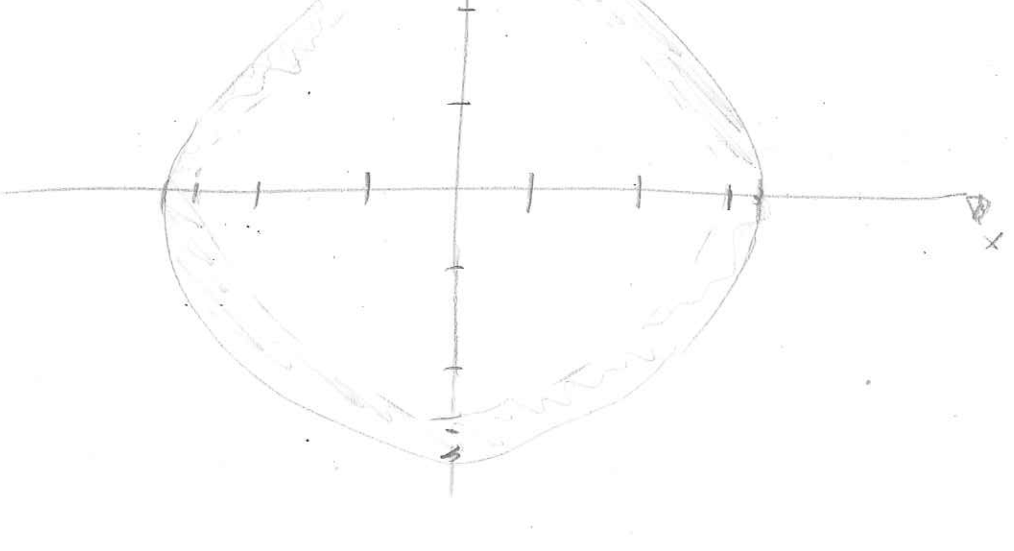
(1) $\log_{1/10}(x^2+y^2-8)\geq 0 \Rightarrow \log_{1/10}(x^2+y^2-8)\geq \log_{1/10} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2-8 \leq 1 \Rightarrow x^2+y^2\leq 9 \quad r=3$



(2) $x^2+y^2-8>0 \Rightarrow x^2+y^2>8 \quad r=\sqrt{8}=2,83$



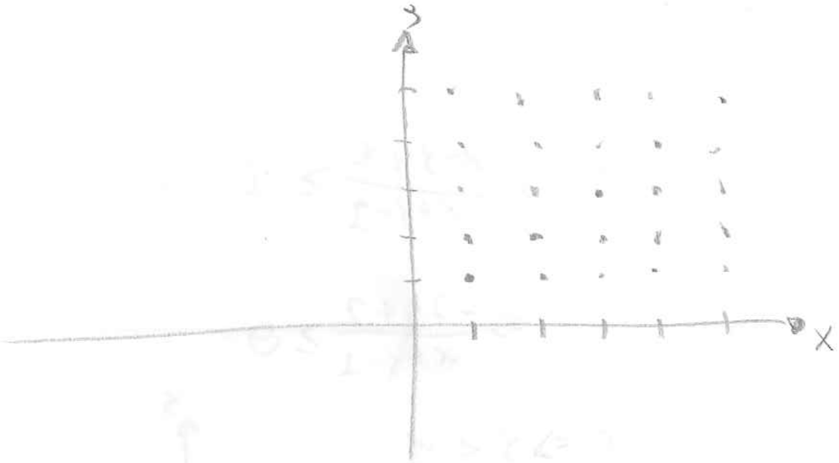


$F(2{,}9,0)=$

$=\log_{1/10}(8{,}41-8)\geq 0$!!!

⑤ ⑧ $z = x!\,y!$ (RICORDA: $n! = n(n-1)(n-2)\ldots$ con $n \in \mathbb{N}^+$

LA FUNZIONE FATTORIALE È DEFINITA SOLO RISPETTO A NUMERI <u>INTERI</u> <u>POSITIVI</u>, PERTANTO IL DOMINIO SARÀ:

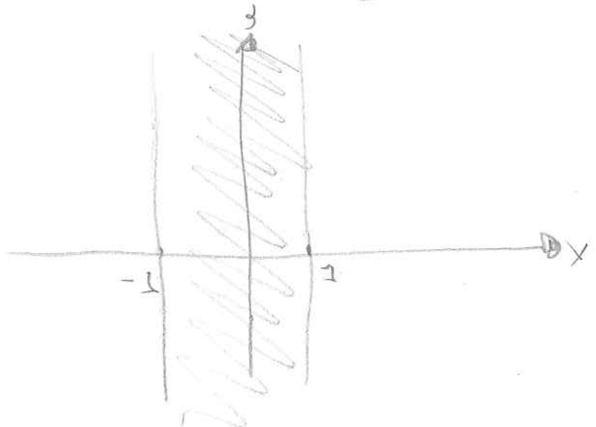


OVVERO I PUNTI DI COORDINATE ENTRAMBE INTERE DEL PRIMO QUADRANTE.

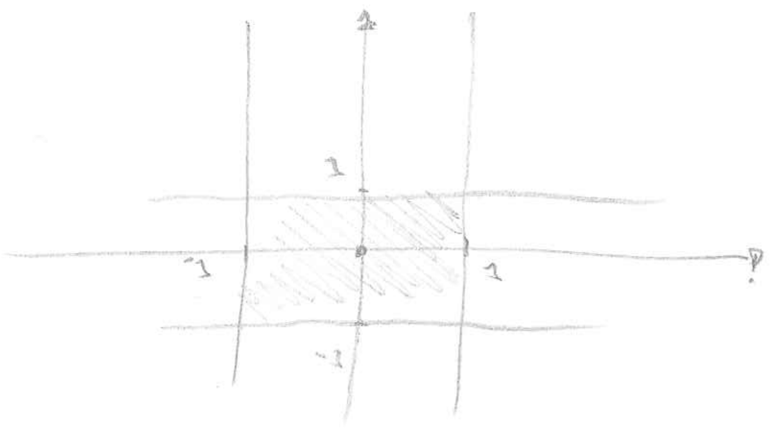
⑪ $z = \arcsin x + \arcsin y$

$$\begin{cases} -1 \le x \le +1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$$

① $-1 \le x \le 1 \Rightarrow x \le 1 \wedge x \ge -1$



② $-1 \le y \le 1 \Rightarrow \cancel{x} \le 1 \wedge \cancel{x} \ge -1$



28) $z=\sqrt{\log\frac{x-y+1}{x+y-1}}$

$$\begin{cases} \log\frac{x-y+1}{x+y-1}\geq 0 \\ \frac{x-y+1}{x+y-1}>0 \end{cases}$$

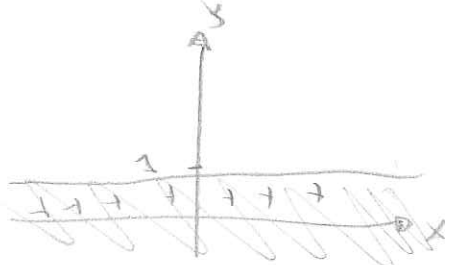
① $\log\frac{x-y+1}{x+y-1}\geq \log 1 \Rightarrow \frac{x-y+1}{x+y-1}\geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\cancel{x}-y+1-\cancel{x}-y+1}{x+y-1}\geq 0 \Rightarrow \frac{-2y+2}{x+y-1}\geq 0$

1.1 $-2y+2\geq 0 \Rightarrow y\leq 1$

$F(0,0)=0+2\geq 0$

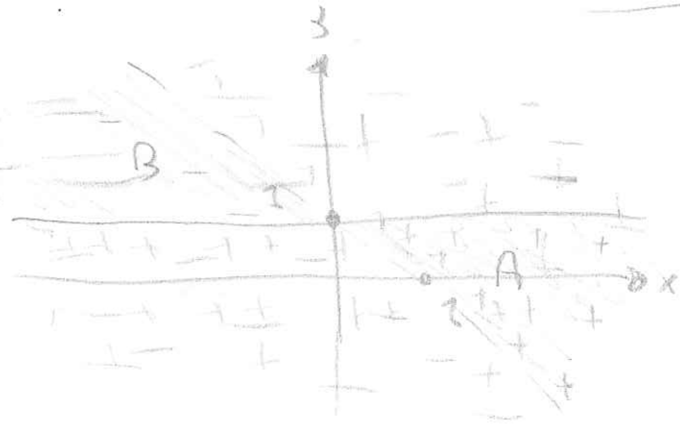
$F(0,-2)=+4+2\geq 0$



1.2 $x+y-1>0 \Rightarrow y>-x+1$

x	y
0	+1
+1	0

$F(2,0)=2-1>0$



$F(x,y)=\frac{-2y+2}{x+y-1}\geq 0$

$F(2,0)=\frac{0+2}{2+0-1}=\frac{2}{1}\geq 0!!$

$F(-2,1)=\frac{-2+2}{-2+1-1}=0\geq!!$

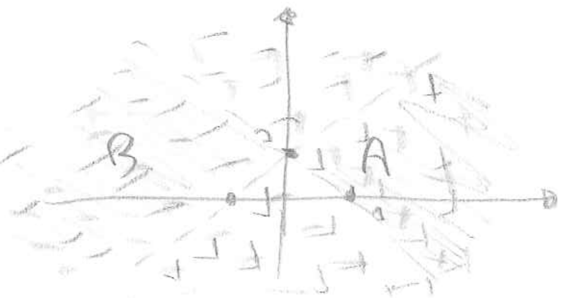
$F(-2,2)=\frac{-4+2}{-2+2-1}=\frac{-2}{-1}\geq 0!!$

② $\frac{x-y+1}{x+y-1}>0$

2.1 $x-y+1>0 \Rightarrow y<x+1$

x	y
0	1
-1	0

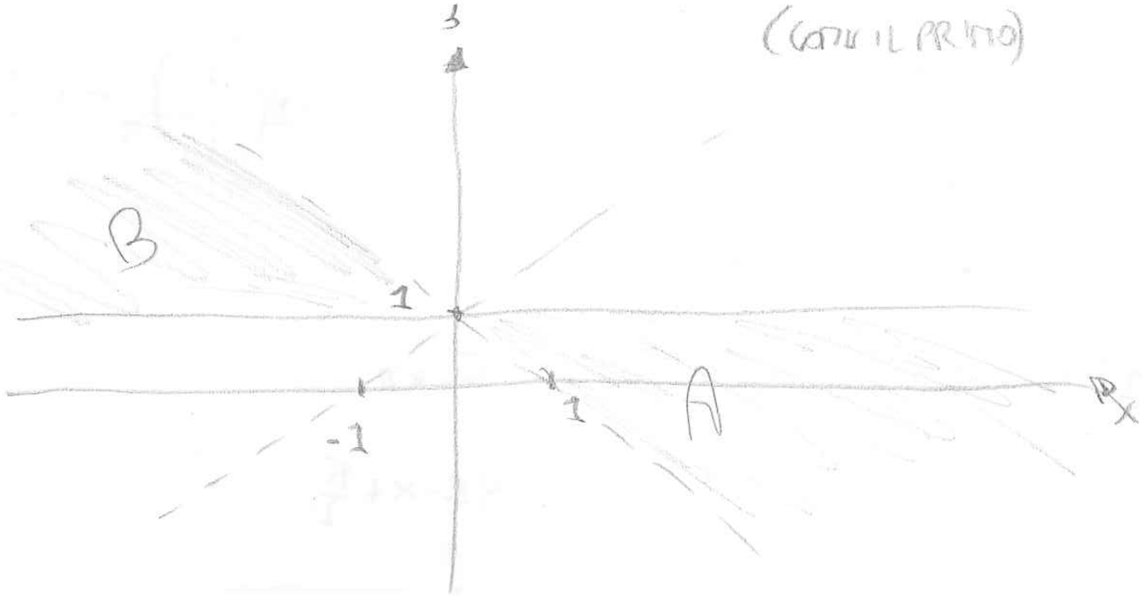
2.2 $x+y-1>0 \Rightarrow y>-x+1$



$F(2,0)=\frac{2-0+1}{2-0-1}=\frac{3}{1}>0!!$

$F(-2,0)=\frac{-2-0+1}{-2-0-1}=\frac{-1}{-3}>0!!$

(CONTU IL PRIMO)



32) $z = \sqrt{1-xy} + \sqrt{9-x^2-y^2}$

$$\begin{cases} 1-xy \geq 0 \\ 9-x^2-y^2 \geq 0 \end{cases}$$

1) $xy \leq 1$

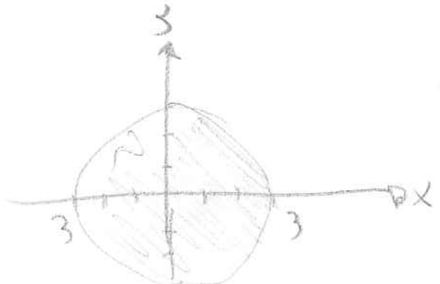
x	y
1	1
2	1/2

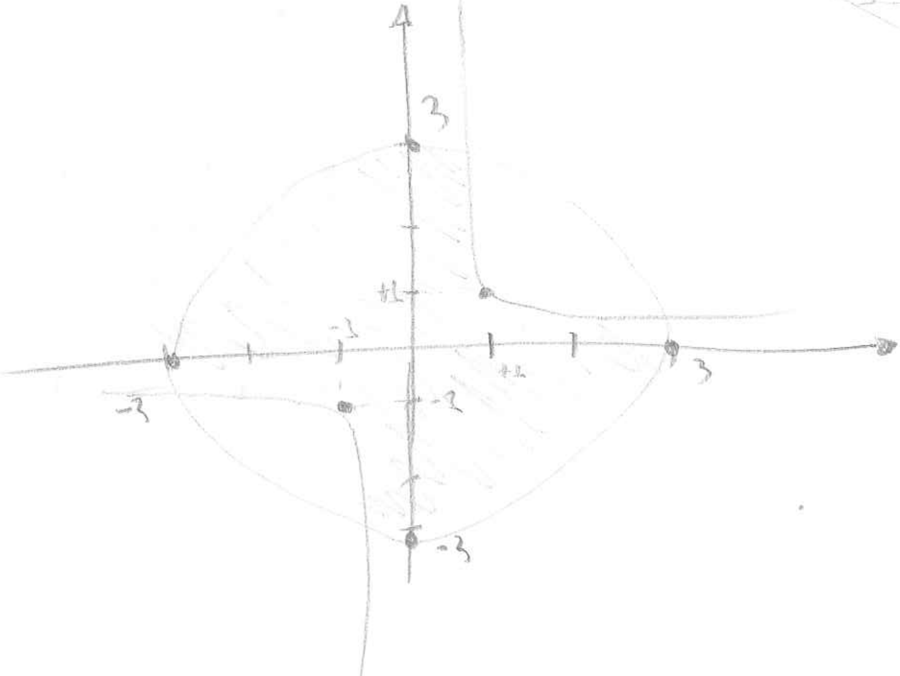
$F(0,0) = 0 \leq 1$

$F(1,0) = 0 \leq 1$

$F(1,-1) = (1 \cdot -1) = -1 \leq 1$

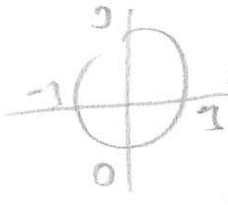
2) $-x^2-y^2+9 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 9 \quad r=3$





(37) $z=\sqrt{\cos(x+y)}+\sqrt{\cos(x-y)}$

$$\begin{cases}\cos(x+y)\ge 0\\ \cos(x-y)\ge 0\end{cases}$$

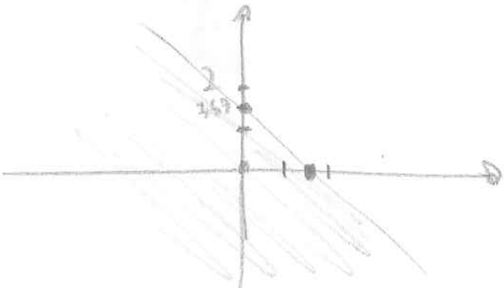


← da $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3}{2}\pi$ è positivo!!

(1) $\cos(x+y)\ge 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\pi+k\pi \le x+y \le \frac{\pi}{2}+k\pi$

(1.1) $x+y \le \frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow y \le -x+\frac{\pi}{2}$

x	y
0	1,57
1,57	0



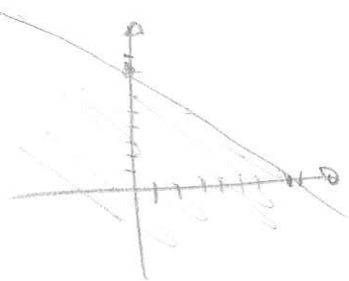
(1.2) $x+y \ge \frac{3}{2}\pi \Rightarrow y \ge -x+\frac{3}{2}\pi$

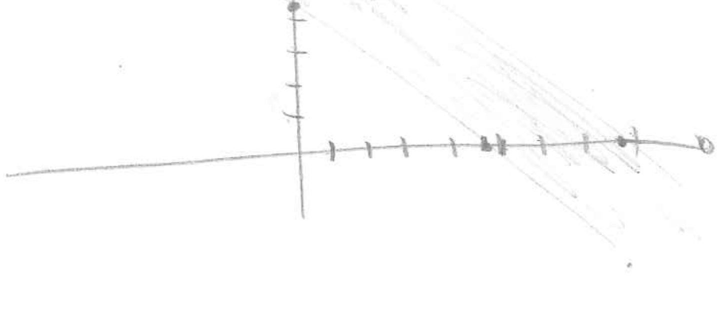
x	y
0	4,71
4,71	0

LA (1.1) CON K=0 NON BASTA, PRENDO K=2 ED HO:

(1.1 b) $x+y \le \frac{\pi}{2}+2\pi \Rightarrow x+y \le \frac{5}{2}\pi$

x	y
0	7,85
7,85	0





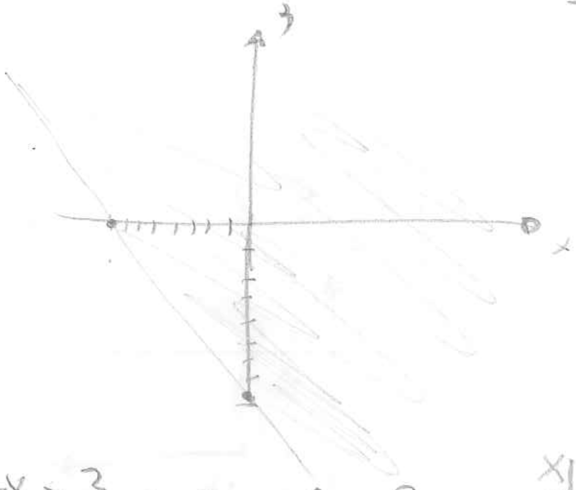
SONO TANTI FASCI DI RETTE CHE VARIANO CON K. STIAMO ASSUMENDO PER COMODITÀ SOLO IL CASO K=2

(17)

(2) $\cos(x-y) \geq 0 \Rightarrow \underset{(4{,}71)}{\frac{3}{2}\pi} \leq x-y \leq \underset{(7{,}57)}{\frac{\pi}{2}+2\pi}$

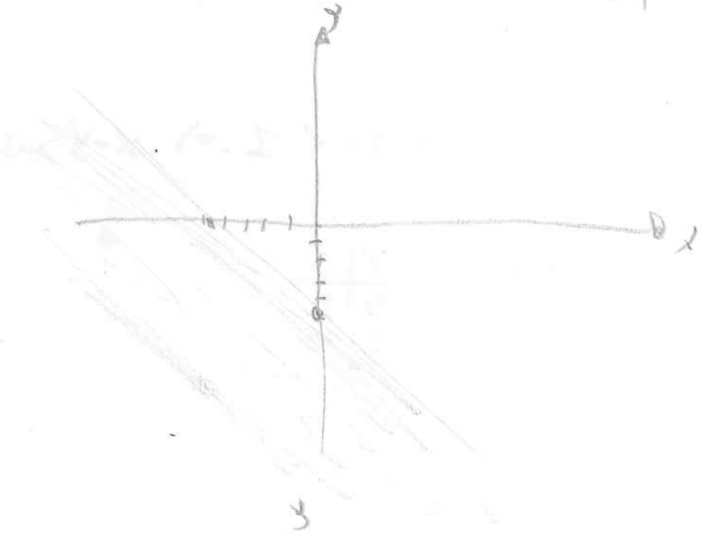
(2.1) $x-y \leq \frac{5}{2}\pi \Rightarrow y \geq x - \frac{5}{2}\pi$

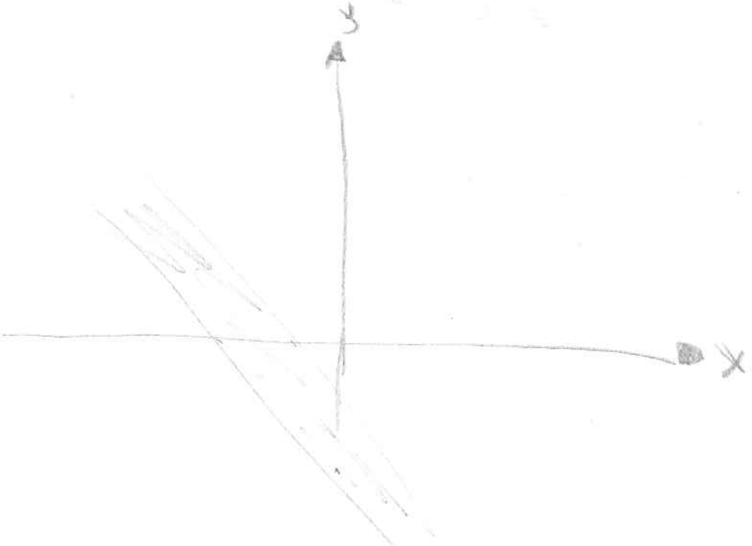
x	y
0	-7,85
-7,85	0



(2.2) $x-y \geq \frac{3}{2}\pi \Rightarrow y \leq x - \frac{3}{2}\pi$

x	y
0	-4,71
-4,71	0





· SI EVINCE CHE ALLA STESSA PERIODICITÀ, $\nexists$ (D $\in \mathbb{R}^2$.

(56) $z=\sqrt{\dfrac{2-|x|}{1-|x-y|}}$

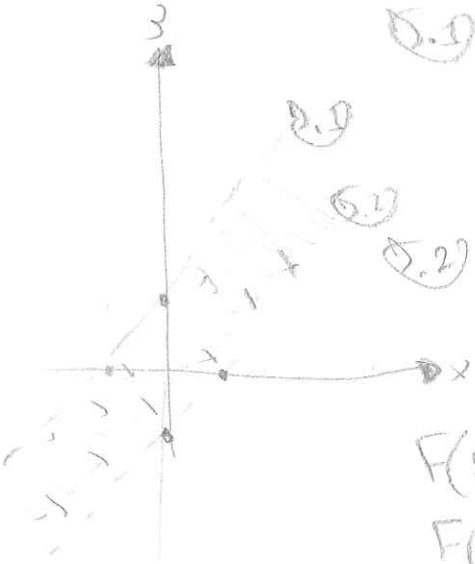
$$\frac{2-|x|}{1-|x-y|}\geq 0$$

(N) $2-|x|\geq 0 \Rightarrow |x|\leq 2 \Rightarrow x\geq -2 \wedge x\leq 2$

$F(0,0)=2\geq 0$!!

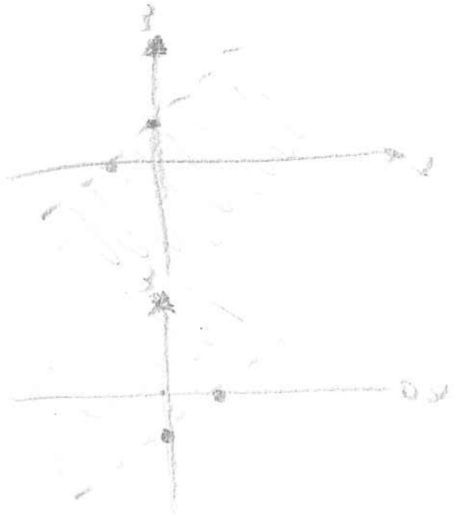
$F(3,0)=2-3\geq 0$!!

(D) $1-|x-y|>0 \Rightarrow |x-y|<1 \Rightarrow x-y>-1 \wedge x-y<1$



(D.1) $y<+1+x$

x	y
0	1
-1	0



(D.2) $y>-1+x$

x	y
0	-1
+1	0

$F(0,0)=1-0>0$

$F(1,1)=1-|1-1|>0$

(Reg. B) $F(-3,0)=\dfrac{2-|-3|}{1-|-3-0|}=\dfrac{2-3}{1-3}=\dfrac{-1}{-2}\geq 0$!!

(Reg. C) $F(3,0)=\dfrac{2-|3|}{1-|3-0|}\geq 0$

(Reg. A) $F(0,0)=\dfrac{2-0}{1-0}\geq 0$!

(48) $z = \sqrt{|x| + |y| - 2x - y - 1}$

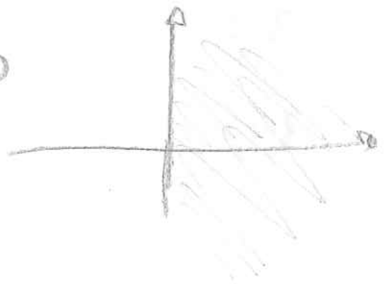
$|x| + |y| - 2x - y - 1 \geq 0$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 2x - y - 1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ -x + y - 2x - y - 1 \geq 0 \end{cases} \vee$

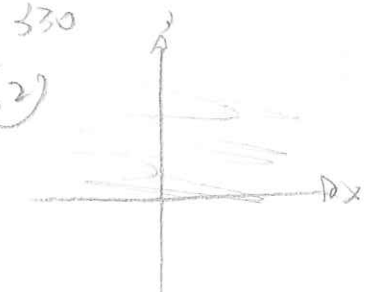
$\vee \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ -x - y - 2x - y - 1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ x - y - 2x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + \cancel{y} - 2x - \cancel{y} - 1 \geq 0 \end{cases}$

(1.1) $x \geq 0$

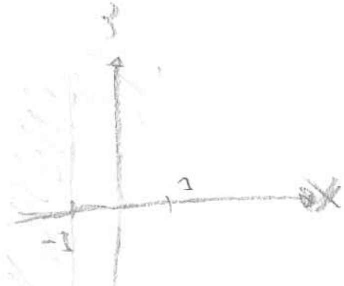


(1.2)



(1.3) $x - 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow -x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$

$F(-2, 0) = -2 + 4 - 1 \geq 0$!!



NESSUNA SOLUZIONE DALL'INTERSEZIONE

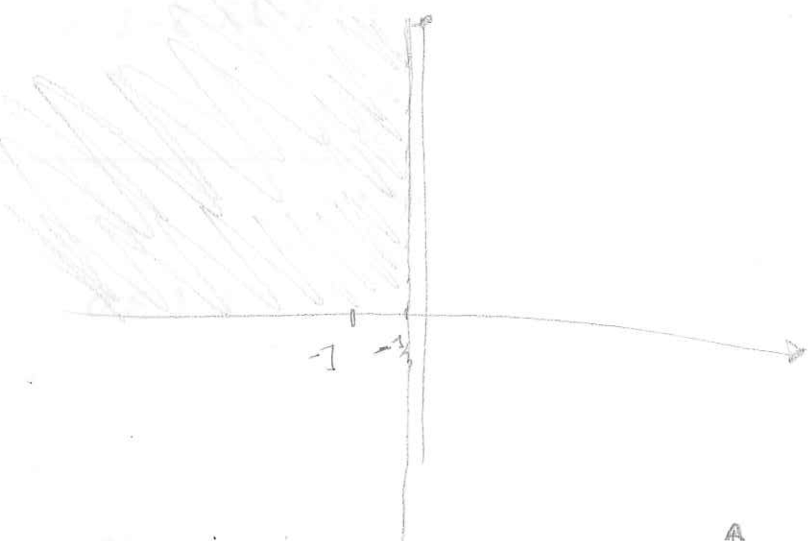
(2) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ -x + \cancel{y} - 2x - \cancel{y} - 1 \geq 0 \end{cases}$

2.1) $x < 0$

2.2) $y \geq 0$

2.3) $-x - 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow -3x - 1 \geq 0 \Rightarrow 3x \leq -1 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{3}$ (0,33)

$F(-1, 0) = +1 + 2 - 1 \geq 0$



(3) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ -x - y - 2x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$

3.1) $x < 0$

3.2) $y < 0$

3.3) $-3x - 2y - 1 \geq 0 \Rightarrow -2y \geq +3x + 1 \Rightarrow y \leq \frac{+3x+1}{2}$

x	y
0	$-1/2$
-1	$+1$
$-1/3$	[illegible]

$F(-1, 0) = +3 - 1 \geq 0$

$F(x, 0) \Rightarrow -3x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

(9)

4) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ x - y - 2x - y - 1 \geq 0 \end{cases}$

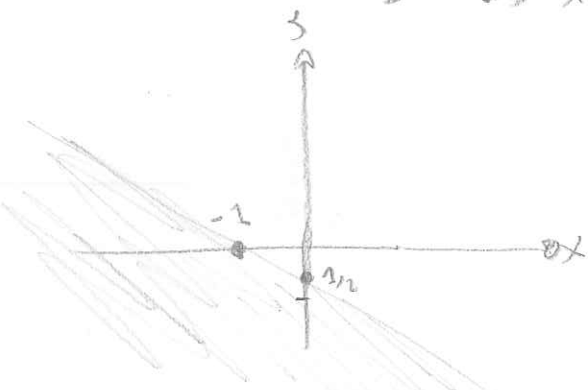
4.1) $x \geq 0$

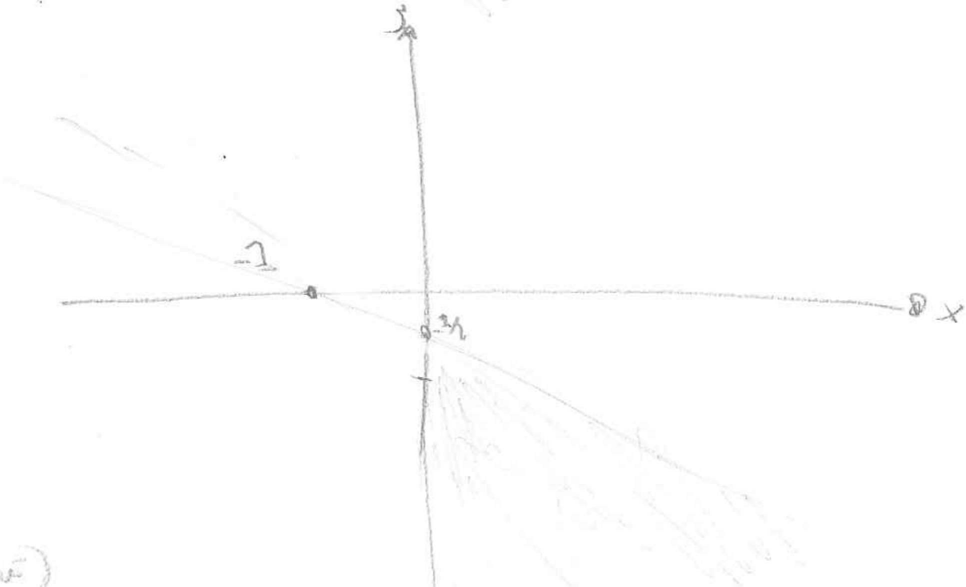
4.2) $y < 0$

4.3) $x - y - 2x - y - 1 \geq 0 \Rightarrow -2y - x - 1 \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{-x-1}{2}$

x	y
0	$-1/2$
-1	0

$F(-2,0) = -2 + 4 - 1 \geq 0$!!



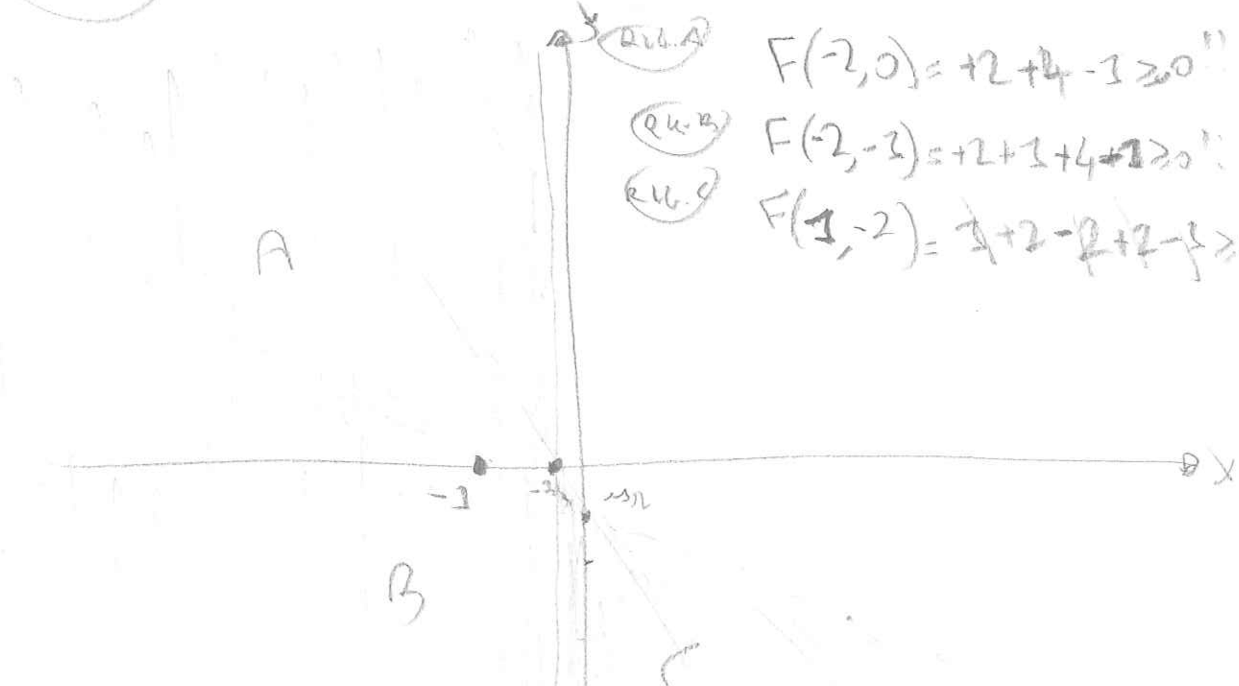


SOLUZIONE

REG.A $F(-2,0) = +2 + 4 - 1 \geq 0$!!

REG.B $F(-2,-1) = +2 + 1 + 4 + 1 \geq 0$!!

REG.C $F(1,-2) = 1 + 2 - 2 + 2 - 1 \geq 0$!!



LIMITI DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

23/09/2011 - 17:30/20:00 - Pag. 242

- LA DEFINIZIONE DI LIMITE PER LE FUNZIONI IN UNA SOLA VARIABILE SI PUÒ ESTENDERE, CON ALCUNE MODIFICHE, ALLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

- DEF. DI LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER $\boxed{P}$ CHE TENDE AD UN PUNTO P_0

DATA $z = f(x, y)$ FUNZIONE DI DUE VARIABILI DEFINITA SU DOMINIO $\boxed{D}$ E DATO $P_0(x_0, y_0)$ PUNTO D'ACCUMULAZIONE di $\boxed{D}$, SI DICE CHE $F(x, y)$ TENDE AL NUMERO $\boxed{l}$ PER $P \to P_0$, OVVERO $x \to x_0 \wedge y \to y_0$ SE QUALSIASI SIA IL NUMERO $\boxed{\varepsilon > 0}$ ARBITRARIAMENTE PICCOLO, È POSSIBILE INDIVIDUARE UN INTORNO DI $P_0(x_0, y_0)$ TALE CHE, PER TUTTI I PUNTI DI $\boxed{D}$ CHE CADONO IN QUEST'INTORNO, SI HA:

$$|F(x, y) - l| < \varepsilon$$

E SI SCRIVE:

$$\lim_{P \to P_0} F(P) = l \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} F(x, y) = l$$

- DEF. DI LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER $\boxed{P}$ CHE TENDE A $\boxed{P_0}$

DATA $z = F(x, y)$ FUNZ. DI 2 VARIABILI DEFINITA SU $\boxed{D}$ E DATO $P_0(x_0, y_0)$ P.d.A. DI $\boxed{D}$, SI DICE CHE $F(x, y)$ TENDE ALL'$\boxed{\text{INFINITO}}$ PER $P \to P_0$, OSSIA $x \to x_0$, $y \to y_0$ SE FISSATO UN NUMERO $\boxed{M}$, ARBITRARIAMENTE GRANDE, ESISTE UN INTORNO DI $P_0(x_0, y_0)$ TALE CHE, PER TUTTI I PUNTI DI $\boxed{D}$ CHE CADONO NELL'INTORNO, SI HA:

$$|f(x, y)| > M$$

E SI SCRIVE:

$$\lim_{P \to P_0} F(P) = \infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} F(x, y) = \infty$$

• DATA UNA FUNZIONE $F(x,y)$, SI SUPPONGA CHE PER $P \to P_0$ ESISTA UN LIMITE FINITO O INFINITO.

ALLORA LA $F(x,y)$ DEVE AMMETTERE LO STESSO LIMITE COMUNQUE SI FACCIA TENDERE P a P_0, QUINDI ANCHE SE SI FA TENDERE P a P_0 LUNGO UNA CURVA $\boxed{\gamma}$ PASSANTE PER P_0.

ANALOGAMENTE SE LUNGO UNA SIFFATTA CURVA NON ESISTE LIMITE O SE SU DUE CURVE DIVERSE PASSANTI PER P_0 SI OTTENGONO DUE LIMITI DIVERSI, ALLORA IL LIMITE NON ESISTE.

• DEF. DI LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER $\boxed{P}$ CHE TENDE ALL'INFINITO

SI DICE CHE $F(x,y)$ TENDE AL VALORE $\boxed{\ell}$ PER $P(x,y)$ TENDENTE ALL'INFINITO SE, COMUNQUE SI SCELGA UN NUMERO $\boxed{\varepsilon > 0}$, ARBITRARIAM. PICCOLO, È POSSIBILE DETERMINARE, IN CORRISPONDENZA AD ESSO, UN INTORNO DELL'ORIGINE TALE CHE, PER TUTTI I PUNTI DEL DOMINIO $\boxed{D}$ ESTERNI A TALE INTORNO SI HA:

$$|F(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

E SI SCRIVE:

$$\lim_{P \to \infty} F(P) = \ell \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} (F(x,y)) = \ell$$

SI NOTI CHE AFFINCHÉ LA DEFINIZIONE ABBIA SENSO IL DOMINIO $\boxed{D}$ DEVE ESSERE ILLIMITATO. INOLTRE NON È NECESSARIO CHE SIA $\boxed{x}$ che $\boxed{y}$ TENDANO CONTEMPORANEAMENTE AD INFINITO, MA È SUFFICIENTE ANCHE UNA SOLA.

11 · DEF. DI LIMITE INFINITO PER $\boxed{P}$ TENDENTE ALL'INFINITO

- SI DICE CHE $F(x,y)$ TENDE ALL'INFINITO PER $P(x,y)$ TENDENTE ALL'INFINITO SE, COMUNQUE SI SCELGA UN NUMERO $M>0$ ARBIT. GRANDE, È POSSIBILE DETERMINARE, IN CORRISPONDENZA AD ESSO, UN INTORNO DELL'ORIGINE TALE CHE, PER I PUNTI DEL DOMINIO $\boxed{D}$ DELLA FUNZIONE ESTERNI ALL'INTORNO, SI ABBIA

$$|f(x,y)|>M$$

SI SCRIVE

$$\lim_{P\to\infty} F(P)=\infty \quad o \quad \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x,y)=\infty$$

ANCHE IN QUESTO CASO IL DOMINIO $\boxed{D}$ DEVE ESSERE ILLIMITATO.

- ANCHE ~~NEL~~ QUESTO CASO, VALE IL DISCORSO FATTO SULLE DIREZIONI (SU CURVE $\boxed{\gamma}$ DIVERSE IL LIMITE È LO STESSO).

· TEOREMI SUI LIMITI

I TEOREMI SUI LIMITI DI FUNZIONI IN UNA VARIABILE SI POSSONO ADATTARE CON, MODIFICHE PURAMENTE FORMALI, A QUELLE IN DUE VARIABILI.

· TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

SE, PER $P\to P_0$ LA FUNZIONE $F(P)$ AMMETTE LIMITE ESSO È UNICO.

· TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

SE PER $P\to P_0$ LA FUNZIONE $F(P)$ TENDE A UN LIMITE FINITO $\boxed{l}$ DIVERSO DA ZERO, ESISTE UN INTORNO DI $\boxed{P_0}$ PER TUTTI I PUNTI DEL QUALE LA FUNZIONE HA LO STESSO SEGNO DEL LIMITE.

· ~~PRIMO~~ SECONDO TEOREMA DEL CONFRONTO

SE, IN UN INTORNO DI P_0, SI HA

$$|F(P)| \leq |G(P)|$$

E SE PER $P\to P_0$ $G(P)$ TENDE A ZERO, ALLORA $F(P)$ TENDE A ZERO PER $P\to P_0$

~~SECONDO~~ PRIMO TEOREMA DEL CONFRONTO

~~SE IN UN INTORNO DI P_0, SI HA~~

$$\cancel{|F(P)| \leq |G(P)|}$$

~~E SE, PER $P \to P_0$, $G(P)$ TENDE A ZERO, ALLORA ANCHE $F(P)$ TENDE A ZERO~~

SE DUE FUNZIONI $G(P)$ E $H(P)$ TENDONO ALLO STESSO LIMITE $\boxed{l}$ PER $P \to P_0$ E, IN UN CERTO INTORNO DI P_0, SI HA:

$$G(P) \leq F(P) \leq H(P)$$

ALLORA ANCHE

$$\lim_{P \to P_0} F(P) = l$$

TERZO TEOREMA DEL CONFRONTO

SE, IN UN INTORNO P_0, SI HA CHE

$$|F(P)| \geq |G(P)|$$

E INOLTRE $\lim_{P \to P_0} G(P) = \infty$, ALLORA RISULTA $\lim_{P \to P_0} F(P) = \infty$

- OPERAZIONI SUI LIMITI: SE SI HA, PER $P \to P_0$ O PER $P \to \infty$, $\lim F(P) = l_1$, $\lim (G(P)) = l_2$ (l_1, l_2 FINITI), ALLORA RISULTA:

1) $\lim [F(P) \pm G(P)] = l_1 \pm l_2$
2) $\lim [F(P) \cdot G(P)] = l_1 \cdot l_2$
3) $\lim [K \cdot F(P)] = K \cdot l_1$ per K COSTANTE
4) $\lim [F(P)]^K = l_1^K$
5) $\lim \sqrt[n]{F(P)} = \sqrt[n]{l_1}$ (PURCHÉ, se [n] è PARI, $l_1 > 0$)
6) $\lim \frac{1}{F(P)} = \frac{1}{l_1}$ (CON $l_1 \neq 0$)
7) $\lim \frac{F(P)}{G(P)} = \frac{l_1}{l_2}$ (CON $l_2 \neq 0$)
8) $\lim |F(P)| = |l_1|$
9) SE $h(z)$ È UNA FUNZIONE DI 1 SOLO VARIABILE CONTINUA IN $z = l_1$ SI HA:

$$\lim h[F(P)] = h(l_1)$$

10) SE $\lim F(P) = 0$ allora $\lim \frac{1}{F(P)} = \infty$

11) SE $\lim F(P) = \infty$ ALLORA $\lim \frac{1}{F(P)} = 0$

• <u>CONDIZIONE NECESSARIA</u>, MA NON SUFFICIENTE, <u>AFFINCHÈ ESISTA</u> $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$ (METODO DELLE RETTE)

SUPPONIAMO CHE $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ con $l \in \mathbb{R}$. FISSIAMO

$P(x_0,y_0)$ È PUNTO DI ACCUMULAZIONE SU $\boxed{A}$ I.D. DI $f(x,y)$

UNA QUANTITÀ $m \in \mathbb{R}$ E CONSIDERIAMO LA RETTA $y = y_0 + m(x-x_0)$, NELLA CUI EQUAZIONE $\boxed{m}$ FIGURA COME <u>COEFFICIENTE ANGOLARE</u>

APPLICANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE, POSSIAMO SCRIVERE CHE:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall (x,y) \in A$ (INSIEME DI DEFINIZIONE DI $f(x,y)$):

$$0 < \underbrace{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}_{\text{NORMA}: \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} < \delta \text{ E } |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

SOSTITUENDO IN TALE ESPRESSIONE LA RETTA SOPRA CONSIDERATA, SI OTTIENE:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni' \forall x \in A: \sqrt{(x-x_0)^2 + \underbrace{m^2(x-x_0)^2}_{\text{SAREBBE } (y-y_0)^2 \Rightarrow (\cancel{y_0}+m(x-x_0)-\cancel{y_0})^2 !!!}} < \delta \Rightarrow |x-x_0|\sqrt{1+m^2} < \delta$$

$$\text{E } |f(x, y_0 + m(x-x_0)) - l| < \varepsilon$$

CIOÈ STIAMO DEFINENDO:

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0 + m(x-x_0)) = l$$

PERTANTO, LA CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÈ

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \text{ è che } \exists \lim_{x \to x_0} f(x, y_0 + m(x-x_0)) = l$$

$\boxed{\forall m \in \mathbb{R}}$!!!

<u>N.B:</u> TALE CONDIZIONE NON È SUFFICIENTE!! CI PERMETTE, PERÒ, DI ASSICURARCI LA <u>NON</u> ESISTENZA DEL LIMITE!!

IN PARTICOLARE, SE SI CONSIDERANO LE RETTE PARALLELE AGLI ASSI DEVE RISULTARE:

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = \lim_{y \to y_0} f(x_0, y)$$

ESEMPIO 1 DIRE SE $\exists \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

SOSTITUENDO $y = 0 + m(x-0) = mx$ SI OTTIENE:

$$f(x, mx) = \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2} \text{ DA CUI } \lim_{x \to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \boxed{\frac{1-m^2}{1+m^2}} \leftarrow \text{INFINITE } \ell!!!$$

POICHÉ COMPARE NELL'ESPRESSIONE DEL ~~...~~ RISULTATO DEL LIMITE "m", SIGNIFICA CHE HO UN NUMERO INFINITO DI $\boxed{\ell}$ $\forall m \in \mathbb{R}$. PERTANTO TALE LIMITE NON ESISTE. POSSIAMO CONFERMARE TALE RISULTATO VERIFICANDO CHE:

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 1$$

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

ESSENDO $\lim f(x,0) \neq \lim f(0,y) \Rightarrow \nexists$ il limite!!!

ESEMPIO 2 DIRE SE $\exists \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x - 2y)}{x - y}$

SOSTITUENDO $y = mx$ HO:

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x - 2mx)}{x - mx} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x(1-2m))}{x(1-m)}$$

RICORDANDO IL LIMITE NOTEVOLE $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, MOLTIPLICO E DIVIDO PER $(1-2m)$:

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}[x(1-2m)]}{x(1-2m)}}_{1} \cdot \frac{(1-2m)}{(1-m)} = \boxed{\frac{1-2m}{1-m}} \quad \nexists \text{ IL LIMITE!!!}$$

• DE L'HOPITAL PER LE FORME DI INDETERMINAZIONE DEL TIPO $[0 \cdot \infty]$

LA REGOLA DI DE L'HOPITAL PUÒ ESSERE UTILE PER TRATTARE LE FORME INDETERMINATE $[0 \cdot \infty]$, IN QUANTO QUESTE SI POSSONO FACILMENTE RICONDURRE ALLE ~~PERCHÉ~~ ALTRE $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

PER ESEMPIO:

$$\lim_{x \to 0} x \ln(x) = [0 \cdot +\infty]$$

DIVENTA

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xrightarrow{\text{L'HOPITAL}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -x = 0!!!$$

24/09/2011 - 10.30 / 13.00 - Esercizi Pag. 650

(1) $$\lim_{\substack{x \to -2 \\ y \to 5}} (x^2 - xy + 2y^2) = 4 + 10 + 50 = 64$$

(2) $$\lim_{\substack{x \to 3 \\ y \to -2}} \operatorname{arctg}(x+y) = \operatorname{arctg}(1) = 45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

(3) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{e^{xy} - 1}{xy} = \frac{0}{0}$$ (FORMA INDETERMINATA)

SOSTITUISCO $z = xy$

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} \xrightarrow{\text{DE L'HOPITAL}} \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{1} = 1$$

(4) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{x+y} = \frac{0}{0}$$ (FORMA INDETERMINATA)

APPLICO LA FORMULA DI PROSTAFERESI:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} 2\frac{x+y}{4}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}}{x+y} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2}}{x+y} \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \cos \frac{x-y}{2} =$$

(1) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2}}{x+y} \quad \boxed{t = x+y} \quad = \lim_{t \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}}{t} \xrightarrow{\text{DE L'HOSPITAL}} \lim_{t \to 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}}{1} =$$

$$= 1$$

(2) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

QUINDI

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{x+y} = 1$$

(10) $$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} = 0 \qquad \text{CONSIDERO } \frac{2}{x^2+y^2}$$

IL LIMITE DI TALE $G(P)$ È:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

VISTO CHE PER $P \to P_0$ RISULTA ZERO, APPLICO IL SECONDO TEOREMA DEL CONFRONTO:

$$\left| \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{2}{x^2+y^2} \right|$$

PERCIÒ ANCHE $F(P)$ TENDE A ZERO.

(13) (15) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{2x^2+2y^2} = \frac{0}{0}$$

$z = x^2+y^2$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{2z} \xrightarrow{\text{DE L'HOPITAL}} \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{1+z}\cdot 1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(20) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{e^{x^2+y^2}-e}{x^2+y^2-1} = \frac{0}{0}$$

$z \to x^2+y^2$

$$\lim_{z\to 1} \frac{e^z-e}{z-1} \xrightarrow{\text{DE L'HOPITAL}} \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{1} = \boxed{e}$$

Pag. 255 TEORIA

- PASSAGGIO IN COORDINATE POLARI

PER LE FUNZIONI IN DUE VARIABILI RISULTA SPESSO UTILE IL PASSAGGIO ALLE COORDINATE POLARI.

SI SUPPONGA DI DOVER DETERMINARE IL LIMITE:

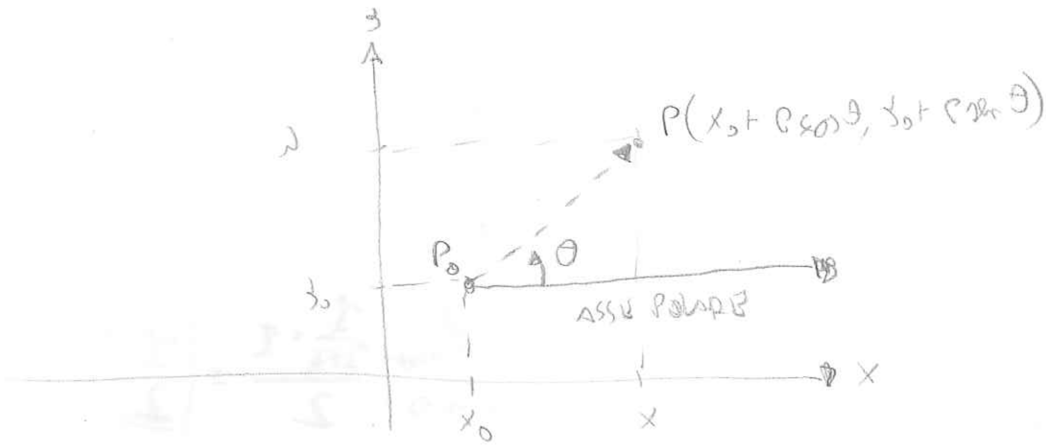
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} F(x,y)$$

CON UN SISTEMA DI RIFERIMENTO POLARE CON ORIGINE NEL PUNTO DI COORDINATE (x_0, y_0) E ASSE POLARE PARALLELO E DI STESSO VERSO DEL SEMIASSE POSITIVO DELLE $\boxed{X}$, TRA LE COORDINATE POLARI ρ (RO) e θ (TETA) E LE COORDINATE CARTESIANE x e y SI HANNO LE RELAZIONI:

$$\begin{cases} x-x_0 = \rho\cos\theta \\ y-y_0 = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0+\rho\cos\theta \\ y = y_0+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

PERTANTO POSSIAMO CONSIDERARE LA FUNZIONE IN COORDINATE POLARI:

$$F(\rho,\theta) = F(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$$



CON IL PASSAGGIO A LIMITE, TENENDO CONTO CHE:

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

SE $x\to x_0 \wedge y\to y_0$ RISULTA $\rho\to 0$ E QUINDI:

$$\lim_{\rho\to 0^+} F(\rho,\theta)$$

- L'IDENTITÀ TRA I DUE LIMITI, PERÒ, NON È ASSICURATA. DIFATTI SE IL LIMITE IN COORDINATE POLARI DIPENDE DA θ (CIOÈ SE IL RISULTATO DEL LIMITE FIGURA CON TETA) IL LIMITE INIZIALE NON PUÒ ESISTERE.
- INVECE SE IL LIMITE IN COORDINATE POLARI NON DIPENDE DA θ, NON È DETTO CHE IL LIMITE INIZIALE ESISTA.

PER ESSERE CERTI DELL'ESISTENZA DEL LIMITE, SI RICORRE AL TEOREMA SEGUENTE:

- TEOREMA SIA $F(x,y)$ UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI E SIA $P_0(x_0,y_0)$ UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE DEL DOMINIO D. POSTO

$$F(\rho,\theta)=F(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

SE È POSSIBILE DETERMINARE UNA FUNZIONE $f(\rho)$ DELLA VARIABILE $\rho>0$ TALE CHE PER OGNI θ, CON $0\leq\theta\leq 2\pi$, SI ABBIA

$$|F(\rho,\theta)-\ell|\leq f(\rho)$$

E INOLTRE

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho)=0$$

ALLORA

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to x_0}} F(x,y)=\ell$$

SE INVECE:

$$|F(\rho,\theta)| \geq |f(\rho)|$$

ED INOLTRE

$$\lim_{\rho \to 0^+} f(\rho) = \infty$$

ALLORA SI HA

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} F(x,y) = \infty$$

LO STESSO RAGIONAMENTO È VALIDO PER IL CALCOLO DEL LIMITE CON $\boxed{\rho \to \infty}$.

NOTA: $\boxed{\rho}$ PUÒ TENDERE SOLO A $+\infty$ o 0^+!!; (ASSUME SOLO VALORI POSITIVI)

• FUNZIONI CONTINUE (CONTINUITÀ TOTALE)

UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI $F(x,y)$ SI DICE CONTINUA NEL PUNTO $P_0(x_0, y_0)$ SE RISULTA:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} F(x,y) = F(x_0, y_0)$$

SE A È UN INSIEME DI PUNTI DEL PIANO, $F(x,y)$ SI DICE CONTINUA NELL'INSIEME $\boxed{A}$ SE È CONTINUA IN OGNI PUNTO DI $\boxed{A}$.

SEGUE SUBITO CHE LA SOMMA, LA DIFFERENZA, IL PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE, IN UN PUNTO O IN UN INSIEME, SONO PURE FUNZIONI CONTINUE.

ANCHE IL QUOZIENTE DI DUE FUNZIONI CONTINUE IN UN PUNTO È ANCORA UNA FUNZIONE CONTINUA IN QUEL PUNTO, PURCHÉ IL DIVISORE NON SI ANNULLI IN TALE PUNTO

INFINE, POSSIAMO AFFERMARE CHE SE $h(z)$ È UNA FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE CONTINUA IN $z = z_0$ E SE SI HA $z_0 = F(x_0, y_0)$, ESSENDO $F(x,y)$ CONTINUA IN $P_0(x_0, y_0)$, LA FUNZIONE COMPOSTA:

$$h[F(x,y)]$$

È CONTINUA IN $P_0(x_0, y_0)$.

CONTINUITÀ PARZIALE

SIA $F(x,y)$ UNA FUNZIONE CONTINUA e $P_0(x_0,y_0)$ UN PUNTO DEL SUO DOMINIO. SE FISSIAMO IL VALORE $\boxed{y=y_0}$ OTTENIAMO DA $F(x,y)$ UNA FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE:

$$\varphi(x)=F(x,y_0)$$

SE TALE FUNZIONE RISULTA CONTINUA PER $x=x_0$, DIREMO CHE $F(x,y)$ È CONTINUA PARZIALMENTE IN $P_0(x_0,y_0)$ RISPETTO ALLA VARIABILE x.

ANALOGAMENTE, SE LA FUNZIONE

$$(\text{PSI})\quad \psi(y)=F(x_0,y)$$

È CONTINUA PER $y=y_0$, DIREMO CHE $F(x,y)$ È CONTINUA PARZIALMENTE IN $P_0(x_0,y_0)$ RISPETTA ALLA VARIABILE y.

SE ACCADE CHE $F(x,y)$ SIA CONTINUA IN $P_0(x_0,y_0)$ SIA RISPETTO A $\boxed{x}$ CHE RISPETTO A y DIREMO CHE È IN $P_0(x_0,y_0)$ CONTINUA PARZIALMENTE RISPETTO AD ENTRAMBE LE VARIABILI.

Esercizi pag. 651

1) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$$

PASSO IN COORDINATE POLARI CON:

$$x = x_0 + \rho\cos\theta = \rho\cos\theta \qquad \rho = \sqrt{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2}$$
$$y = y_0 + \rho\sin\theta = \rho\sin\theta$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta \cdot \rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} \Rightarrow \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \to 0^+} \rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta = \emptyset$$

IL LIMITE POTREBBE ESISTERE. DEVO TROVARE UNA $f(\rho)$ TALE CHE:

$$|F(\rho,\theta) - l| \leq f(\rho)$$

E

$$\lim_{\rho \to 0^+} f(\rho) = \emptyset$$

SAPENDO CHE:

$$\cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \leq 1 \Rightarrow \rho^2(\cos^2\theta\sin^2\theta) \leq \rho^2 \text{ con } f(\rho) = \rho^2$$

INFATTI

$$\lim_{\rho \to 0^+} \rho^2 = \emptyset \,!!$$

PERTANTO $\exists \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \emptyset$

(2)

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

PASSO ALLE COORDINATE POLARI CON:

$$x = \rho\cos\theta \qquad \rho \to +\infty$$
$$y = \rho\sin\theta$$

OTTENGO:

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{\rho\cos\theta + \rho\sin\theta}{\rho^2\cos\theta + \rho^2\sin\theta} \Rightarrow \lim_{\rho \to +\infty} \frac{\rho(\cos\theta + \sin\theta)}{\rho^2(\cos\theta + \sin\theta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \to +\infty} \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\rho} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{se } \cos\theta + \sin\theta = 0 & \lim_{\rho \to +\infty} \frac{0}{\rho} = 0 \\ \text{se } \cos\theta + \sin\theta \neq 0 & \lim_{\theta \to +\infty} \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\rho} = 0 \end{array}$$

IL LIMITE PUÒ ESISTERE. DEVO TROVARE UNA $f(\rho)$ TALE CHE:

$$|F(\rho,\theta) - l| \leq f(\rho)$$

e

$$\lim_{\rho \to +\infty} f(\rho) = 0$$

SO CHE:

$$\cos\theta + \sin\theta \leq 2 \Rightarrow \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\rho} \leq \frac{2}{\rho} \quad \text{con } f(\rho) = \frac{2}{\rho}$$

$$\overset{e}{0 \leq 2}$$

INFATTI

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{2}{\rho} = 0 \qquad \text{QUINDI } \exists \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

(16) (3) $\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{xy}{x^2+y^2}$

COORDINATE POLARI CON:

$x = \rho\cos\theta$ $\quad \rho \to +\infty$

$y = \rho \sin\theta$.

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}} = \lim_{\rho\to+\infty} \cos\theta\sin\theta = \cos\theta\sin\theta$$

VISTO CHE IL LIMITE DIPENDE DA $\boxed{\theta}$, $\nexists \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{xy}{x^2+y^2}$

(4) $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)$

COORDINATE POLARI CON:

$x = x_0 + \rho\cos\theta = \rho\cos\theta \quad \rho \to 0^+$

$y = y_0 + \rho\sin\theta = \rho\sin\theta$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta} + \frac{\rho\cos\theta}{\rho\sin\theta} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\overbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}^{1}}{\cos\theta\sin\theta} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

POICHÉ C'È UNA DIPENDENZA DA θ, $\nexists \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)$

(11) $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{e^{x^2+2y^2}}{2x^2+y^2}$$

PASSO ALLE COORDINATE POLARI CON:

$$x = \rho\cos\theta \qquad \rho\to+\infty$$
$$y = \rho\,\text{sen}\,\theta$$

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{e^{\rho^2\cos^2\theta+2\rho^2\text{sen}^2\theta}}{2\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\text{sen}^2\theta} \Rightarrow \lim_{\rho\to+\infty} \frac{e^{\rho^2(\cos^2\theta+2\text{sen}^2\theta)}}{\left(\rho^2(2\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)\right)} \Rightarrow$$

RICORDANDO IL LIMITE NOTEVOLE $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}^+$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER $\boxed{\cos^2\theta+2\,\text{sen}^2\theta}$:

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to+\infty} \underbrace{\frac{e^{\rho^2(\cos^2\theta+2\text{sen}^2\theta)}}{\rho^2(\cos^2\theta+2\,\text{sen}^2\theta)}}_{+\infty} \cdot \frac{\cos^2\theta+2\,\text{sen}^2\theta}{2\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta} = +\infty$$

IL LIMITE PUÒ ESISTERE. TROVO UNA $f(\rho)$ TALE CHE:

$$|f(\rho,\theta)| \geq f(\rho) \quad e \quad \lim_{\rho\to+\infty} f(\rho) = +\infty$$

SO CHE:

$$\cos^2\theta+2\,\text{sen}^2\theta = \boxed{1+\text{sen}^2\theta \geq 1} \Rightarrow e^{\rho^2(\cos^2\theta+2\text{sen}^2\theta)} \geq e^{\rho^2}$$

$$2\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta = \boxed{1+\cos^2\theta \geq 1} \qquad \rho^2(2\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta) \geq \rho^2$$

PERTANTO HO CHE $f(\rho) \geq \frac{e^{\rho^2}}{\rho^2}$ CON $\boxed{\lim_{\rho\to+\infty} \frac{e^{\rho^2}}{\rho^2} = +\infty}$ (LIMITE NOTEVOLE)

PERTANTO $\exists \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{e^{x^2+2y^2}}{2x^2+y^2}$

(12) $$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\log(x^2+y^2)}{x^2+3y^2}$$

(17)

PASSO IN COORDINATE POLARI CON:

$$x = \rho \cos\vartheta \qquad \rho \to +\infty$$
$$y = \rho \sin\vartheta$$

OTTENGO:

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{\log(\rho^2)}{\rho^2(\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta)} \Rightarrow \text{APPLICO DE L'HOPITAL}$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \to +\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{\rho^2}} \cdot 2\rho}{2\rho(\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta)} \Rightarrow \lim_{\rho \to +\infty} \frac{2}{\rho^2(\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta)} = \emptyset$$

IL LIMITE PUÒ ESISTERE. DEVO TROVARE UNA $f(\rho)$ PER CUI:

$$|f(\rho;\vartheta) - l| \leq f(\rho) \ \text{e} \ \lim_{\rho \to +\infty} f(\rho) = \emptyset$$

SO CHE:

$$\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta = \boxed{1 + 2\sin^2\vartheta \geq 1} \Rightarrow$$

(DENOMINATORE) $\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta \geq 1 \Rightarrow \rho^2(\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta) \geq \rho^2$

HO TROVATO UN DENOMINATORE PIÙ PICCOLO CHE RENDE LA MIA $f(\rho)$ PIÙ GRANDE!! QUINDI $\frac{\log(\rho^2)}{\rho^2(\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta)} \leq \frac{\log(\rho^2)}{\rho^2}$

INOLTRE HO CHE:

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{\log(\rho^2)}{\rho^2} \Rightarrow \lim_{\rho \to +\infty} \frac{\frac{2\rho}{\rho^2}}{2\rho} = \emptyset$$

QUINDI $\exists \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\log(x^2+y^2)}{x^2+3y^2}$

(14) $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{(x-1)^2 + y^2}{x+y-1}$$

PASSO ALLE COORDINATE POLARI CON:

$$x = x_0 + \rho \cos\theta = 1 + \rho\cos\theta \qquad \rho \to 0^+$$
$$y = y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta = \rho \operatorname{sen}\theta$$

OTTENGO

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{(\cancel{1} + \rho\cos\theta - \cancel{1})^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{1} + \rho\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\theta - \cancel{1}} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^{\cancel{2}}(\overbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}^{1})}{\cancel{\rho}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} \qquad \begin{array}{l} \text{se } \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \neq 0 \quad \lim\limits_{\rho \to 0^+} \dfrac{\rho}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} = 0 \\ \text{sen } \cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \nexists \lim \end{array}$$

POICHÉ TALE LIMITE NON È INDIPENDENTE DA θ (INFATTI IN $\theta_1 = \frac{3}{4}\pi \vee \theta_2 = \frac{7}{4}\pi$ IL LIMITE NON È DEFINITO) TALE LIMITE NON ESISTE

$$\nexists \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{(x-1)^2 + y^2}{x+y-1}$$

(15) $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ y \to 1}} \frac{x^2 - y^2 + 2x + 2y}{x+y}$$

PASSO ALLE COORDINATE POLARI:

$$x = -1 + \rho\cos\theta \qquad \rho \to 0^+$$
$$y = 1 + \rho\operatorname{sen}\theta$$

OTTENGO:

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{(-1+\rho\cos\theta)^2 - (1+\rho\operatorname{sen}\theta)^2 + 2(-1+\rho\cos\theta) + 2(1+\rho\operatorname{sen}\theta)}{-\cancel{1} + \rho\cos\theta + \cancel{1} + \rho\operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\cancel{1} + \rho^2\cos^2\theta - \cancel{2\rho\cos\theta} - \cancel{1} - \rho^2\operatorname{sen}^2\theta - \cancel{2\rho\operatorname{sen}\theta} - \cancel{2} + \cancel{2\rho\cos\theta} + \cancel{2} + \cancel{2\rho\operatorname{sen}\theta}}{\rho\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\theta} =$$

(18) $$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \sin^2\theta}{\rho\cos\theta + \rho\sin\theta} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cos\theta + \sin\theta} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho\cancel{(\cos\theta + \sin\theta)}(\cos\theta - \sin\theta)}{\cancel{(\cos\theta + \sin\theta)}} = \lim_{\rho \to 0^+} \rho(\cos\theta - \sin\theta) = \emptyset$$

IL LIMITE PUÒ ESISTERE. TROVO UNA $f(\rho)$ PERCHÉ:

$$|F(\rho,\theta) - \ell| \leq f(\rho) \text{ e } \lim_{\rho \to 0^+} f(\rho) = \emptyset$$

SO CHE:

$$\cos\theta - \sin\theta \leq 2 \Rightarrow \rho(\cos\theta - \sin\theta) \leq 2\rho$$

IL LIMITE ESISTE!!!

Esercizi pag. 652

Verificare la continuità delle funzioni nei punti indicati:

① $f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ in $P(5\pi, 2)$

AFFINCHÈ SIA CONTINUA IN |P| DEVO AVERE:

$$\lim_{\substack{x \to 5\pi \\ y \to 2}} \cos\left(\frac{x}{y}\right) = f(5\pi, 2) = \cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \emptyset$$

PER ASSERIRE CIÒ, DEVO DIMOSTRARE L'ESISTENZA DEL LIMITE. PASSO ALLE COORDINATE POLARI:

$$x = x_0 + \rho\cos\theta$$
$$y = y_0 + \rho\sin\theta \qquad \rho \to 0^+$$

OTTENGO:

$$\lim_{\rho \to 0^+} \cos\left(\frac{5\pi + \rho\cos\theta}{2 + \rho\sin\theta}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \emptyset$$

IL LIMITE PUÒ ESISTERE. DEVO TROVARE UNA $f(\rho)$ PER CUI:

$$|F(\rho, \theta) - l| \leq f(\rho) \quad e \quad \lim_{\rho \to 0^+} f(\rho) = \emptyset$$

SO CHE

$$\frac{5\pi + \rho\cos\theta}{2 + \rho\sin\theta} \leq \frac{5\pi + \rho}{2 + \rho} \Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi + \rho\cos\theta}{2 + \rho\sin\theta}\right) \leq \cos\left(\frac{5\pi + \rho}{2 + \rho}\right)$$

INOLTRE

$$\lim_{\rho \to 0^+} \cos\left(\frac{5\pi + \rho}{2 + \rho}\right) = \emptyset$$

IL LIMITE ESISTE ED È PROPRIO UGUALE A $\emptyset$!!!

(19) VERIFICARE SE LA FUNZIONE È CONTINUA TOTALMENTE O PARZIALMENTE IN P(0,0)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \varnothing & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

PER VERIFICARE LA CONTINUITÀ TOTALE DEVO AVERE CHE:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = f(0,0) = \varnothing$$

VERIFICO L'ESISTENZA DI TALE LIMITE IN COORDINATE POLARI:

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}} = \cos\theta \sin\theta$$ IL LIMITE NON ESISTE ESSENDOCI DIPENDENZA DA θ!!

PERTANTO NON C'È CONTINUITÀ TOTALE IN P(0,0). VERIFICO SE C'È CONTINUITÀ PARZIALE RISPETTO A x o y:

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = f(x_0, 0) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2+0} = \varnothing \quad \text{OK!!}$$

$$\lim_{y \to y_0} f(x,y) = f(0, y_0) \Rightarrow \lim_{y \to 0} \frac{0}{0+y^2} = \varnothing \quad \text{OK!!!}$$

QUINDI ESSENDO LA FUNZIONE CONTINUA PARZIALMENTE SIA RISPETTO A x CHE y IN P(0,0), ESSA È PARZIALMENTE CONTINUA!!

ESERCIZIO DI PROLUNGABILITÀ PER CONTINUITÀ

DATA $f(x,y) = x^3 \cdot \log(x^2+y^2)$, DIRE SE È PROLUNGABILE PER CONTINUITÀ.

RISOLUZIONE

PROLUNGARE TALE FUNZIONE SIGNIFICA AGGIUNGERE AL SUO INSIEME DI DEFINIZIONE UN PUNTO $P(\bar{x},\bar{y})$. CIÒ CHE DOBBIAMO VERIFICARE È SE:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = \alpha \text{ (ESISTE ED È FINITO).}$$

POICHÉ I.D. $= \{x^2+y^2 > 0 \Rightarrow (x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$, VERIFICO LA CONTINUITÀ SULLA f COSÌ DEFINITA:

$$f = \begin{cases} x^3 \cdot \log(x^2+y^2), & (x,y) \neq 0 \\ \alpha, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

VERIFICHIAMO, QUINDI, LA PROLUNGABILITÀ IN $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \alpha$$

CALCOLIAMO CON IL PASSAGGIO ALLE COORDINATE POLARI ($x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$; $\rho\to 0$):

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^3\cos^3\theta \log\rho^2 = 0^+ \cdot -\infty$$ INDETERMINATO!! APPLICO DE L'HOPITAL

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cos^3\theta \cdot \log\rho^2}{\frac{1}{\rho^3}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos^3\theta \frac{1}{\rho^{\cancel{2}}}\cdot(2\cancel{\rho})}{-3\cdot\frac{1}{\rho^4}} = \lim_{\rho\to 0} \cos^3\theta \cdot \frac{2}{\cancel{\rho}}\cdot\left(-\frac{\rho^{\cancel{4}\,3}}{3}\right) =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} -\frac{2}{3}\underbrace{\cos^3\theta}_{\max 1}\cdot\rho^3 = 0$$

POICHÉ $\exists\, f(\rho) = -\frac{2}{3}\cdot\rho^3$ PER CUI

$$|F(\rho,\theta) - \ell| \leq f(\rho), \quad \lim_{\rho\to 0} f(\rho) = 0$$

IL LIMITE ESISTE ED È FINITO, CON $\alpha = 0$!! LA FUNZIONE È PROLUNGABILE!!