1

EQ. DIFF. del ~~PRIMO~~ SECONDO ORDINE (DOVE È PRESENTE y'')

- UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ESPRESSA NELLA FORMA:

$$\boxed{y''+ay'+by=P(x)} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

SI DICE DI SECONDO ORDINE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI.

- SE LA FUNZIONE $P(x)$ RISULTA IDENTICAMENTE NULLA, CIOÈ SE L'EQUAZIONE SI PRESENTA NELLA FORMA.

$$\boxed{y''+ay'+by=0} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

ALLORA SI DICE LINEARE OMOGENEA (O INCOMPLETA). IN CASO CONTRARIO, SI DICE NON OMOGENEA (O COMPLETA)

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ GLOBALE

SI CONSIDERI LA EQ. DIFF.

$$y''+ay'+by=P(x) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

E SIA $P(x)$ CONTINUA IN UN INTERVALLO I. ALLORA, COMUNQUE SI SCELGANO I VALORI x_0, y_0, y'_0 con $x_0 \in I$, ESISTE UNA SOLA SOLUZIONE $f(x)$ DI TALE EQ., DEFINITA IN I, CHE SODDISFA LE CONDIZIONI INIZIALI:

NON OMOGENEA

$$\begin{cases} f(x_0)=y_0 \\ f'(x_0)=y'_0 \end{cases}$$

IN PARTICOLARE, SE L'EQ. È OMOGENEA ($P(x)=0$) ALLORA ESISTE UN'UNICA SOLUZIONE SODDISFACENTE LE $\boxed{C.I.}$ CHE HA COME DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R}$ → OMOGENEA

FUNZIONI LINEARMENTE DIPENDENTI / INDIPENDENTI

DATE DUE FUNZIONI $f_1(x)$ e $f_2(x)$, DEFINITE IN UN INTERVALLO I, e NON NULLE, ESSE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE ESISTONO DUE COSTANTI C_1 e C_2, NON ENTRAMBE NULLE, PER CUI:

$$C_1 \cdot f_1(x)+C_2 \cdot f_2(x)=0$$ (LA LORO COMBINAZIONE LINEARE È ZERO)

- IN ALTRI TERMINI, SE $C_1 \neq 0$:

$$f_1(x)=-\frac{C_2}{C_1}\cdot f_2(x) \quad \text{ove} \quad -\frac{C_2}{C_1}=K$$

LE DUE FUNZIONI SONO LIN. DIPENDENTI IN I SE ESISTE ~~UNA~~ COSTANTE K TALE CHE:

$$f_1(x)=k \cdot f_2(x) \longrightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}=k$$ → IL RAPPORTO FRA LE DUE FUNZIONI È UNA COSTANTE

IN TAL CASO LE DUE FUNZIONI SONO PROPORZIONALI.

- SE $f_1(x)$ e $f_2(x)$ NON SONO LINEARMENTE DIPENDENTI, SI DICONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

RISOLUZIONE EQ. LINEARI OMOGENEE

2

PROPRIETÀ DELLE SOLUZIONI

UNA COMBINAZIONE LINEARE DI SOLUZIONI È ANCORA UNA SOLUZIONE.
SUSSISTE INFATTI IL TEOREMA:

SIANO $y_1(x)$ e $y_2(x)$ DUE SOLUZIONI DELL'EQ. DIFF.

$$y''+ay'+by=0$$

E SIANO k_1, k_2 COSTANTI REALI. ALLORA ANCHE LA FUNZIONE:

$$y=k_1\cdot y_1(x)+k_2\cdot y_2(x)$$

COMB. LINEARE DI $y_1(x)$ e $y_2(x)$, È UNA SOLUZIONE.

WRONSKIANO DELLE SOLUZIONI

SIANO $y_1(x)$ e $y_2(x)$ DUE SOLUZIONI DELL'EQ. DIFF.

$$y''+ay'+by=0$$

(1) L'ESPRESSIONE

$$w(x)=y_1(x)\cdot y_2'(x)-y_2(x)\cdot y_1'(x)$$

DETTA WRONSKIANO DELLE SOLUZIONI È O DIVERSA DA ZERO $\forall x\in\mathbb{R}$ O È SEMPRE ZERO.

(2) LE SOLUZIONI $y_1(x)$ e $y_2(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE E SOLO SE IL LORO WRONSKIANO È DIVERSO DA ZERO IN ALMENO UN PUNTO $x_0\in\mathbb{R}$.

INTEGRALE GENERALE

SE y_1 e y_2 SONO DUE SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI DELL'EQ. DIFF.

$$y''+ay'+by=0$$

ALLORA, COMUNQUE SI FISSINO LE CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y'_0 \end{cases}$$

È POSSIBILE DETERMINARE LE COSTANTI C_1 e C_2 IN MODO CHE:

$$* \; y=C_1\cdot y_1(x)+C_2\, y_2(x) \quad \text{(COMB. LINEARE DI SOLUZIONI)}$$

CHE È UNA SOLUZIONE DELLA EQ. DIFF., SODDISFI LE C.I. SI DIRÀ ALLORA CHE L'EQ. * È L'INTEGRALE GENERALE DELLA EQ. DIFF.

- CIOÈ L'INTEGRALE GENERALE DI UNA EQ. DIFF. A COEFFICIENTI COSTANTI OMOGENEA SI OTTIENE DALLA COMBINAZIONE LINEARE DI DUE SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI

DETERMINAZIONE INTEGRALE GENERALE

③

CONSIDERANDO L'EQUAZIONE DIFF.

$$y'' + a y' + b y = 0$$

E ANALIZZANDO LA FUNZIONE

$$y = e^{kx} \quad k \text{ costante}$$

OSSERVIAMO CHE $y = e^{kx}$, $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. DETERMINIAMO, QUINDI, PER QUALI VALORI DI $\boxed{k}$ LA NOSTRA $\boxed{3}$ È SOLUZIONE DELL'EQ. DIFF.

$$k^2 e^{kx} + a k e^{kx} + b e^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}(k^2 + ak + b) = 0$$

IN QUANTO $e^{kx} \neq 0$, SI HA CHE

$$\boxed{k^2 + ak + b = 0}$$

TALE RELAZIONE PRENDE IL NOME DI EQUAZIONE CARATTERISTICA. A SECONDA DELLE RADICI DI QUESTA EQ., SI RISCONTRANO TRE DIVERSE CASISTICHE:

1) RADICI k_1 E k_2 REALI

L'INTEGRALE GENERALE DIVENTA

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}}$$

2) RADICI k_1 E k_2 REALI COINCIDENTI ($k_1 = k_2$)

L'INTEGRALE GENERALE DIVENTA

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot x \cdot e^{k_2 x}}$$

3) RADICI COMPLESSE

L'INTEGRALE DIVIENE ($k_1 = \alpha \pm j\beta$)

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen}\beta x}$$

O IN FORMA SINUSOIDALE ALTERNATIVA

$$y = A \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x + \varphi)$$ dove A = MODULO, φ = FASE

EQUAZIONI DIFF. LINEARI NON OMOGENEE

SI CONSIDERI L'EQUAZIONE

$$(1) \quad y'' + ay' + by = p(x)$$

DOVE $p(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA, NON NULLA, IN UN INTERVALLO I. L'EQUAZIONE DIFF. OMOGENEA ASSOCIATA DELLA (1) È:

$$(2) \quad y'' + ay' + by = 0$$

SUPPONIAMO CHE L'INTEGRALE GENERALE DELLA (2) SIA LA FUNZIONE $Y(x)$. CIOÈ SIA:

$$(3) \quad Y'' + aY' + bY = 0$$

SUPPONIAMO INOLTRE CHE $q(x)$ SIA UN INTEGRALE PARTICOLARE DELLA (1):

$$(4) \quad q'' + aq' + bq = p(x)$$

DEFINITA, QUINDI LA FUNZIONE:

$$(5) \quad y(x) = Y(x) + q(x)$$

SI VERIFICA CHE ESSA È UN INTEGRALE DELL'EQUAZIONE (1). DIFATTI SI DEDUCE:

$$\left| \; y' = Y' + q' \quad e \quad y'' = Y'' + q'' \; \right|$$

CHE SOSTITUITI NELLA (1) PRODUCONO:

$$(Y'' + q'') + a \cdot (Y' + q') + b(Y + q) = \boxed{(Y'' + aY' + bY) + (q'' + aq' + bq) = 0 + p(x)}$$

CHE È PROPRIO IL SECONDO MEMBRO DELLA (1). SI PUÒ QUINDI CONCLUDERE CON IL SEGUENTE

TEOREMA: L'INTEGRALE GENERALE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE COMPLETA È UGUALE ALLA SOMMA DELL'INTEGRALE GENERALE DELLA CORRISPONDENTE EQUAZIONE OMOGENEA $(Y(x))$ E DI UN INTEGRALE PARTICOLARE DELLA EQUAZIONE COMPLETA $(q(x))$.

QUINDI IL PROBLEMA DEL CALCOLO DI UN'EQUAZ. LIN. COMP. SI RIDUCE A QUELLO DELL'INDIVIDUAZIONE DI UN INTEGRALE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE STESSA

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DIFF. LIN. NON OMOG. A COEFF. COSTANTI CON IL METODO DI LAGRANGE (PAG. 400)

5

CONSIDERIAMO IL METODO DI LAGRANGE DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE.

SIA DATA L'EQUAZIONE:

$$(1)\quad y'' + a y' + b y = P(x) \quad \text{con } P(x) \text{ continua in } I$$

E SUPPONIAMO CHE $y_1(x)$ e $y_2(x)$ SIANO DUE INTEGRALI LINEARMENTE INDIPENDENTI DELL'EQ. DIFF. OMOGENEA ASSOCIATA:

$$(2)\quad y'' + a y' + b y = 0$$

SAPPIAMO CHE L'INT. GENERALE DELLA (2) È:

$$(3)\quad \boxed{y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2} \quad \text{con } C_1, C_2 \text{ costanti.}$$

VOGLIAMO VEDERE SE CONSIDERANDO C_1 e C_2 FUNZIONI $C_1(x)$ e $C_2(x)$ SIA POSSIBILE OTTENERE UN INTEGRALE CHE SODDISFI LA (1). CIÒ ACCADE SE ~~LE~~ DERIVATE DI $C_1(x)$ e $C_2(x)$ SODDISFANO IL SEGUENTE SISTEMA:

NOTA: RISOLVENDO IL SISTEMA TROVO $C_1'(x)$ e $C_2'(x)$!!!

$$(4)\quad \begin{cases} C_1' y_1 + C_2' \cdot y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = P(x). \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

NELLE INCOGNITE C_1' e C_2'. MA IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI È:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' = W$$

OVVERO È UGUALE AL WRONSKIANO W delle soluzioni y_1 e y_2 CHE, ESSENDO LINEARMENTE INDIPENDENTI, CI PERMETTONO DI AFFERMARE CHE $W \neq 0$ ~~xxxx~~ PER OGNI PUNTO DELL'INTERVALLO. PERCIÒ ESSENDO $\det(A) = W \neq 0$ sempre (l'intervallo) IL SISTEMA (4) È DETERMINATO ED È POSSIBILE CALCOLARE $C_1'(x)$ e $C_2'(x)$. SOSTITUENDO QUESTE NELLA (3) SI HA:

$$g(x) = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2 \longrightarrow$$ $C_1(x)$ e $C_2(x)$ SI OTTENGONO INTEGRANDO LE DERIVATE $C_1'(x)$ e $C_2'(x)$.

PERTANTO PER IL TEOREMA VISTO IN PRECEDENZA (FOGLIO PRIMA), L'INTEGRALE GENERALE DELLA (1) SARÀ:

$$y = C_1 y_1 + C_2 \cdot y_2 + g(x) = (C_1 y_1 + C_2 y_2) + (C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2)$$

METODI PARTICOLARI PER LA RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI. (4 CASI + PRINCIPIO SOVRAPPOSIZIONE DELLE SOLUZIONI) 6

POICHÉ IL METODO DI LAGRANGE IMPLICA L'UTILIZZO DELL'OPERAZIONE DI INTEGRAZIONE CHE, TALVOLTA, PUÒ RISULTARE COMPLESSA, SI PREFERISCE RICORRERE AD UN'ALTRA PROCEDURA DETTA "METODO DEI COEFFICIENTI INDETERMINATI". ESSA SI PUÒ APPLICARE SOLO SE $P(x)$ È ESPRESSO IN UNA DETERMINATA FORMA. CONSIDERIAMO I VARI CASI POSSIBILI.

1° CASO SIA $P(x)$ POLINOMIO DI GRADO $\boxed{n}$:

$$P(x) = P_n(x)$$

UN INTEGRALE PARTICOLARE $q(x)$ DELL'EQUAZIONE:

$$y'' + ay' + by = P(x) \quad (1)$$

SARÀ ANCH'ESSO UN POLINOMIO I CUI COEFFICIENTI VANNO DETERMINATI IN MODO DA SODDISFARE LA (1). IL GRADO m DI $q(x)$ SARÀ AL MASSIMO $\boxed{n+2}$ E PRECISAMENTE:

$$\text{se } b \neq 0 \rightarrow m = n$$
$$\text{se } b = 0 \wedge a \neq 0 \rightarrow m = n+1$$
$$\text{se } b = 0 \wedge a = 0 \rightarrow m = n+2$$

NELL'ULTIMO CASO, L'EQUAZIONE (1) SI RIDURREBBE A $y'' = f(x)$, IL CUI INTEGRALE GENERALE SI OTTIENE TRAMITE DUE SUCCESSIVE INTEGRAZIONI.

ESEMPIO:

DATA:

$$y'' + 2y' = x$$

POICHÉ $b = 0$ e $a \neq 0$, IL GRADO DEL POLINOMIO $q(x)$ SARÀ $n+1 = 2$.

IL POLINOMIO GENERICO È QUINDI:

$$q(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } q'(x) = 2ax + b \ \text{e} \ q''(x) = 2a$$

DEVE QUINDI ESSERE:

$$2a + 2(2ax + b) = x \Rightarrow 4ax + 2a + 2b = x$$

PER IL PRINCIPIO D'IDENTITÀ DEI POLINOMI:

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

C RESTA INDEFINITO, SI HA:

$$q(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + c$$

DETERMINIAMO ORA L'INTEGRALE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA:

$$y'' + 2y' = 0 \quad . \quad k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k(k+2) = 0 \quad k_1 = 0 \vee k_2 = -2$$

QUINDI HO:

$$y = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^{-2x} \rightarrow c_1 + c_2 \cdot e^{-2x}$$

INFINE OTTENIAMO L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE DATA COME:

$$y = c_1 + c_2 \cdot e^{-2x} + q(x) = c_1 + c_2 \cdot e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + c$$

(57) II° CASO SIA $P(x)$ UNA FUNZIONE DEL TIPO

$$P(x) = A \cdot e^{\alpha x}$$ con A, α costanti arbitrarie

SI DISTINGUONO 3 CASI:

a) α non coincide con UNA DELLE RADICI DELL'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA:

$$k^2 + ak + b = 0$$

IN TAL CASO PER INDIVIDUARE UN INTEGRALE PARTICOLARE DELL'EQ. COMPLETA SI PONE:

$$q(x) = B \cdot e^{\alpha x}$$ con B costante da determinare

b) α coincide con una delle radici distinte dell'equazione caratteristica. SI PONE:

$$q(x) = B \cdot x \cdot e^{\alpha x}$$ con B cost. da determinare

c) α è radice doppia (cioè è uguale alle due radici reali e coincidenti) dell'EQ. CARATTERISTICA. SI PONE

$$q(x) = B \cdot x^2 \cdot e^{\alpha x}$$ con B cost. da determinare

ESEMPIO

INTEGRARE L'EQUAZIONE

$$y'' + y = e^x$$

L'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA è $y'' + y = 0$ ed HA EQ. CARATTERISTICA $k^2 + 1 = 0$, LE CUI RADICI SONO $k_{1,2} = \pm i$. L'INTEGRALE GENERALE RISULTA:

$$y = (C_1 \cdot \cos 1 \cdot x + C_2 \cdot \operatorname{sen} 1 \cdot x) \cdot e^{0 \cdot x}$$

POICHÉ $\alpha = 1 \neq k_{1,2}$ PONIAMO COME INTEGRALE GENERALE:

$$q(x) = B \cdot e^{1 \cdot x}$$ con $q' = B \cdot e^x$, $q'' = B \cdot e^x$

SOSTITUENDO TUTTO NELL'EQ. INIZIALE

$$B \cdot e^x + B \cdot e^x = e^x \Rightarrow 2Be^x = e^x$$

PER IL PRINCIPIO D'IDENTITÀ DEI POLINOMI:

$$2B = 1 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}}$$

L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. INIZIALE È PERTANTO:

$$y = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cdot e^x$$

3° CASO) SIA P(X) UNA FUNZIONE DEL TIPO

$$p(x) = C\cdot \operatorname{sen}\beta x + D\cdot \cos\beta x$$

CON C, D, β COSTANTI.

- SE $\boxed{i\beta}$ <u>NON È RADICE</u> DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA $k^2+ak+b=0$ DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA ALL'EQ. DI PARTENZA, SI DETERMINA L'INTEGRALE PARTICOLARE DELL'EQ. DI PARTENZA PONENDO:

$$q(x) = A\cdot \operatorname{sen}\beta x + B\cdot \cos\beta x$$

CON A e B COSTANTI DA DETERMINARE IN MODO CHE $q(x)$ VERIFICHI L'EQ. DI PARTENZA.

- SE $\boxed{i\beta}$ <u>È RADICE</u> DELL'EQ. CARATTERISTICA, SI PONE:

$$q(x) = x\left(A\operatorname{sen}\beta x + B\cos\beta x\right)$$

CON A e B COSTANTI DA DETERMINARE.

ESEMPIO: INTEGRARE L'EQUAZIONE

$$y'' - y' = \cos x$$

L'EQ. OMOG. ASSOCIATA È $y''-y'=0$ CON EQ. CARATTERISTICA $k^2-k=0$. I PARAMETRI CHE CI INTERESSANO SONO $C=0$, $D=1$, $\beta=1$, $k_1=0$, $k_2=1$. POICHÉ LE RADICI DELL'EQ. CAR. NON COINCIDONO CON $\boxed{i\beta}$, L'INTEGRALE PARTICOLARE SARÀ:

$$q(x) = A\cdot \operatorname{sen} x + B\cdot \cos x \text{ con}$$
$$q'(x) = A\cos x - B\operatorname{sen} x$$
$$q''(x) = -A\operatorname{sen} x - B\cos x$$

SOSTITUENDO ABBIAMO

$$-A\operatorname{sen} x - B\cos x - A\cos x + B\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow (B-A)\operatorname{sen} x + (-B-A)\cos x = \cos x$$

OTTENIAMO CHE:

$$\begin{cases} B-A=0 \\ -B-A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=A \Rightarrow B=-\frac{1}{2} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

QUINDI

$$q(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x$$

L'INTEGRALE GENERALE DELL'OMOGENEA È $y = c_1 e^{0x} + c_2\cdot e^{1x}$ PERTANTO L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. INIZIALE È:

$$y = c_1 + c_2 e^{x} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x$$

9 4° CASO IMPORTANTE!!!

SIA $P(x)$ UNA FUNZIONE DEL TIPO:

$$P(x) = e^{\alpha x}\left[C(x)\cdot \cos\beta x + D(x)\operatorname{sen}\beta x\right] \quad (1)$$

CON α e β costanti e $C(x)$ e $D(x)$ POLINOMI NELLA VARIABILE x.

SI NOTI CHE NEL CASO $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$ LA (1) ASSUME LA FORMA

$$P(x) = e^{\alpha x}\cdot C(x) \quad (2)$$

SE INVECE SI HA $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ LA (1) DIVENTA:

$$P(x) = C(x)\cos\beta x + D(x)\operatorname{sen}\beta x \quad (3)$$

- NEL CASO IN CUI $\boxed{\alpha + i\beta}$ È RADICE DELL'EQ. CARATTERISTICA $k^2 + ak + b = 0$ ALLORA L'INTEGRALE PARTICOLARE HA LA FORMA:

$$q(x) = e^{\alpha x}\cdot\left[A(x)\cdot \cos\beta x + B(x)\operatorname{sen}\beta x\right] \quad (4)$$

IN CUI $A(x)$ e $B(x)$ SONO POLINOMI ENTRAMBI DI GRADO UGUALE AL GRADO MAGGIORE TRA $C(x)$ e $D(x)$.

- SE INVECE $\boxed{\alpha + i\beta}$ È UNA DELLE RADICI DELL'EQ. CARATTERISTICA ALLORA L'INTEGRALE PARTICOLARE DIVIENE:

$$q(x) = x\cdot e^{\alpha x}\left[A(x)\cdot \cos\beta + B(x)\operatorname{sen}\beta x\right] \quad (5)$$

CON $A(x)$ e $B(x)$ SEMPRE POLINOMI DI GRADO UGUALE AL MAGGIORE TRA $C(x)$ e $D(x)$.

È IMPORTANTE OSSERVARE CHE SE $k_1 = k_2$ IL NUMERO COMPLESSO $\alpha + i\beta$ NON SARÀ MAI SOLUZIONE DELL'EQ. CARATTERISTICA SALVO IL CASO IN CUI $\beta = 0$. IN QUESTO CASO $P(x)$ SARÀ NELLA FORMA (2) E L'INTEGRALE PARTICOLARE $q(x)$ DELL'EQ. COMPLETA RISULTERÀ:

$$q(x) = x^2\cdot A(x)\cdot e^{\alpha x}$$

ESEMPIO: INTEGRARE L'EQUAZIONE

$$y''-4y'+3y=(2x+1)e^{2x}$$

L'EQ. CARATTERISTICA $k^2-4k+3=0$ HA $k_1=1$ e $k_2=3$. IN QUESTO CASO $\alpha=2$, $\beta=0$, $C(x)=2x+1$. POICHÉ $\boxed{\alpha+i\beta}$ NON È SOLUZIONE DELLA CARATTERISTICA, L'INTEGRALE PARTICOLARE È NELLA FORMA

$$q(x)=e^{2x}\cdot A(x)$$

CON $A(x)$ POLINOMIO DI GRADO 1 A CAUSA DI $C(x)$ CHE RISULTA DI GRADO UNO. QUINDI:

$$q(x)=e^{2x}(a_0x+a_1) \text{ con}$$

$$q'(x)=e^{2x}(a_0+2a_0x+2a_1)$$

$$q''(x)=4e^{2x}(a_0+a_0x+a_1)$$

L'EQ. INIZIALE DIVENTA:

$$4e^{2x}(a_0+a_0x+a_1)-4e^{2x}(a_0+2a_0x+2a_1)+3e^{2x}(a_0x+a_1)=(2x+1)\cdot e^{2x} \Rightarrow$$

~~DA CUI OTTENIAMO:~~

$$\Rightarrow e^{2x}(\cancel{4a_0}+4a_0x+4a_1-\cancel{4a_0}-8a_0x-8a_1+3a_0x+3a_1)=(2x+1)\cdot e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2x}(-a_0x-a_1)=(2x+1)e^{2x}$$

DA CUI OTTENIAMO:

$$-a_0x-a_1=2x+1 \Rightarrow \begin{cases}-a_0=2\\ -a_1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_0=-2\\ a_1=-1\end{cases}$$

QUINDI $q(x)$ DIVENTA:

$$q(x)=e^{2x}\cdot(-2x-1)$$

L'INTEGRALE GENERALE DELL'OMOGENEA È $y=c_1\cdot e^x+c_2\cdot e^{3x}$. QUINDI L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. INIZIALE È:

$$y=c_1\cdot e^x+c_2\cdot e^{3x}-(2x+1)e^{2x}$$

(10) PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE SOLUZIONI

SUPPONIAMO DI DOVER INTEGRARE UN'EQUAZIONE DEL TIPO:

$$y'' - ay' + by = p_1(x) + p_2(x) \quad (1)$$

DOVE $p_1(x)$ e $p_2(x)$ SONO DUE POLINOMI DEI TIPI PARTICOLARI ESAMINATI.

POICHÈ LA (1) È COMPLETA, L'INT. GEN. SI OTTIENE COME SOMMA DELL'INT. GEN. DELL'OMOGENEA ASSOCIATA PIÙ UN INTEGRALE PARTICOLARE $q(x)$ DELLA (1).

SIA QUINDI $q_1(x)$ UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI:

$$y'' + ay' + by = p_1(x)$$

e $q_2(x)$ UNA SOL. PART. DI

$$y'' + ay' + by = p_2(x)$$

IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE SOLUZIONI ASSICURA CHE UN INTEGRALE $q(x)$ DELLA (1) È OTTENIBILE COME:

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x)$$

ESEMPIO: SI DEBBA RISOLVERE L'EQ.

$$y'' + y' = e^{-x} + 2x$$

L'EQ. CAR. È $k^2 + k = 0$ CON $k_1 = -1$ e $k_2 = 0$. L'INTEGRALE GENERALE È PERTANTO:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x}$$

IN QUESTO CASO ABBIAMO CHE $p_1(x) = e^{-x}$ e $p_2(x) = 2x$

PER LA SOVRAP. DELLE SOL. IL NOSTRO INTEGRALE ~~GENERALE~~ PARTICOLARE È:

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x)$$

- CON $q_1(x)$ SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE:

$$y'' + y' = e^{-x} \quad , \quad k^2 + k = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = -1$$ COINCIDE CON α

OVVERO $q_1(x) = B \cdot x \cdot e^{-x} = -x \cdot e^{-x}$

- E $q_2(x)$ SOL. DELL'EQ.:

$$y'' + y' = 2x \quad (b = 0 \text{ quindi } m = n+1)$$

OVVERO $q_2(x) = ax^2 + b + c = x^2 - 2x + c$

PERTANTO L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. INIZIALE È:

$$\boxed{y = c_1 + c_2 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} + x^2 - 2x + c}$$