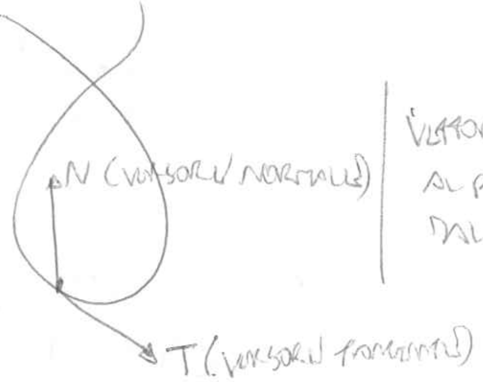
VERSORE NORMALE

VETTORE

DATA UNA CURVA f(A), IL VERSORE NORMALE INDICA QUANTO LA CURVA DIFFERISCE DA UNA LINEA RETTA.



VETTORE PERPENDICOLARE AL PIANO INDIVIDUATO DAL VERSORE TANGENTE

INSIEME APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO

INSIEME APERTO

È UN INSIEME PER CUI È POSSIBILE SPOSTARSI SUFFICIENTEMENTE POCO IN OGNI DIREZIONE A PARTIRE DA OGNI PUNTO SENZA USCIRE DALL'INSIEME STESSO.

(INSIEME CONNESSO) SEMPLICEMENTE: INSIEME FATTO SOLO DI UN PEZZO E CHE NON HA BUCHI.

1) → RICONOSCERE DOMINIO CONNESSO E SEMPLICEMENTE CONNESSO

CARATTERIZZAZIONE DIFFERENZIALI $\int_\gamma \omega = 0$

2) ESERCIZIO FORMA DIFFERENZIALE

3) FUNZIONE DI CLASSE C^0, C^1, C^2 etc. PER MASSIMI E MINIMI.

4) INT. DOPPIO: DOMINIO NORMALE

INSIEME CONNESSO

SU $\mathbb{R}^2$, DIRE CHE UN INSIEME È CONNESSO SIGNIFICA CHE UN INSIEME NON PUÒ ESSERE OTTENUTO COME INTERSEZIONE DI DUE INSIEMI APERTI DISGIUNTI:

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$ SI DICE CONNESSO $\iff \nexists\, A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTI, NON VUOTI, DISGIUNTI t.c. $A = A_1 \cup A_2$

2 → CURVA REGOLARE A TRATTI

DATA LA CURVA $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ESSA SI DICE REGOLARE A TRATTI SE ESISTE UNA PARTIZIONE (CIOÈ UN SOTTOINSIEME) DI $[a,b]$ DEFINITO COME $\{a = a_0 < a_1 < \dots a_n = b\}$ t.c. $\forall i = 1 \dots n$ SI HA CHE $\varphi_i = \varphi/_{[a_{i-1}, a_i]}$ È REGOLARE

UN TRATTO DI CURVA DEFINITA NELL'INTERVALLO $[a_{i-1}, a_i]$

FRONTIERA DI UN INSIEME IN $\mathbb{R}^2$

SIA $\boxed{A}$ UN GENERICO INSIEME INCLUSO IN $\mathbb{R}^2$ ($A \subseteq \mathbb{R}^2$). DENOTANDO CON $B_\delta(P_0)$ L'INTORNO DI UN GENERICO PUNTO $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ SI PUÒ DIRE CHE:

1) P_0 È INTERNO AD $\boxed{A}$ SE ESISTE UN INTORNO CHE SI TROVA ALL'INTERNO DI $\boxed{A}$:

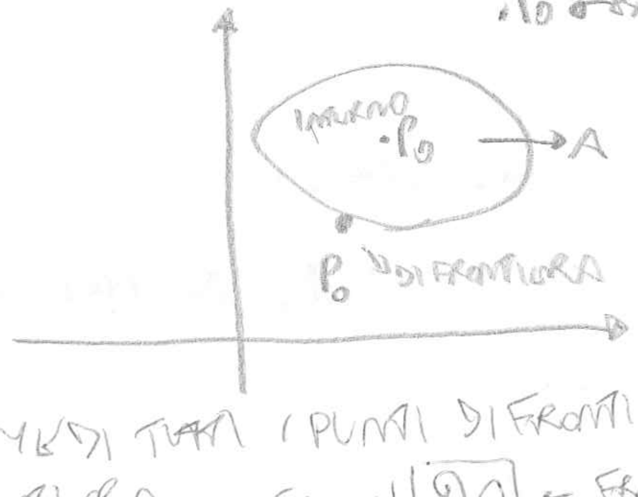
$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } B_\delta(P_0) \subset A$$

CONTENUTO

2) P_0 È ESTERNO AD $\boxed{A}$ SE SI TROVA NEL COMPLEMENTARE DI $\boxed{A}$, CIOÈ È INTERNO AL $\boxed{C_{\mathbb{R}^2}(A)}$

3) P_0 È DI FRONTIERA SE NON È NÉ INTERNO NÉ ESTERNO.

~~ESTERNO~~

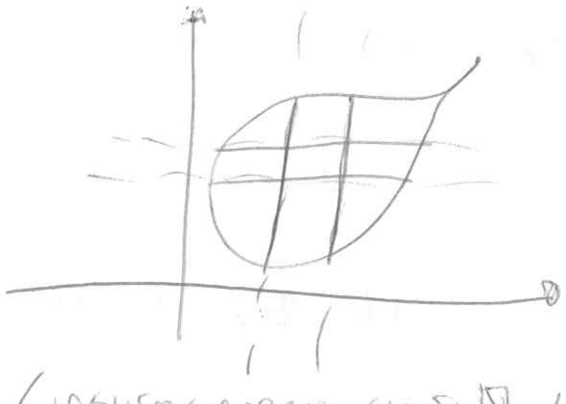


L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI DI FRONTIERA È DETTA FRONTIERA, SI SCRIVE $\boxed{\partial A}$ ← FRONTIERA DI $\boxed{A}$

· È POSSIBILE RICONOSCERE GRAFICAMENTE SE UN INSIEME D È NORMALE TRACCIANDO DELLE RETTE PARALLELE ALL'ASSE X e Y. SE ESSE INTERSECANDO L'INSIEME CREANO UN SEGMENTO o UN PUNTO ALLORA ESSO È NORMALE (RISPETTO ALL'ASSE DI CUI ~~SI SONO TRACCIATE LE RETTE~~ SI È PRESO IL RIFERIMENTO)

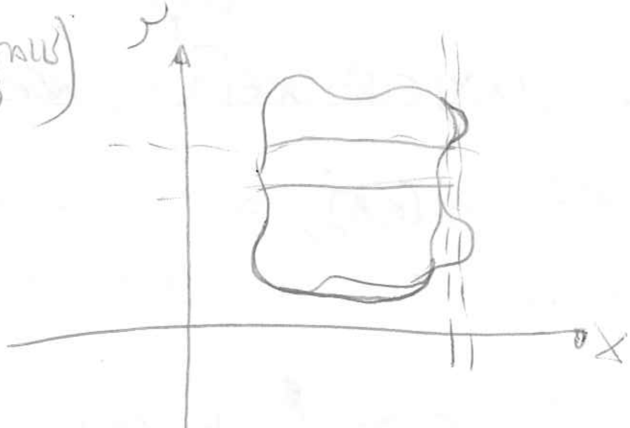
TANTI SEGMENTI.

| INSIEME NORMALE RISPETTO AD X |



(INSIEME NORMALE SIA SU $\boxed{X}$ che SU $\boxed{Y}$)

(INSIEME NORMALE RISPETTO A Y)



CURVA REGOLARE A TRATTI

→ DEF. CURVA

SI DEFINISCE CURVA L'APPLICAZIONE $\boxed{f: I \to \mathbb{R}^2, I \subseteq \mathbb{R}}$

IL CODOMINIO $f(I)$ SI DICE IMMAGINE SOSTEGNO DELLA CURVA

INOLTRE $f(t) = (f_1(t), f_2(t))\ \forall t \in I$ OVVERO LA CURVA PUÒ DEFINIRSI TRAMITE $f_1(t)$ e $f_2(t)$ CHE RAPPRESENTANO LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DELLA CURVA

→ CURVA REGOLARE

è continua ed ha derivata prima continua su $[a, b]$

SIA $f: [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1[a, b]$. ESSO SI DICE REGOLARE SE

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t)) \neq (0,0) \quad \forall t \in]a, b[$$

CON $f'(t)$ [LA DERIVATA DELLA FUNZIONE CURVA] CHE PRENDE IL NOME DI $\boxed{\text{VETTORE TANGENTE}}$

FORMULE DI GAUSS - GREEN

CONCETTI PRELIMINARI

- ✓ DOMINIO NORMALE
- ✓ FRONTIERA DI UN INSIEME / DOMINIO
- ✓ INSIEME APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO
- ✓ CURVA REGOLARE A TRATTI
- ✓ VERSORE NORMALE (VETTORE)

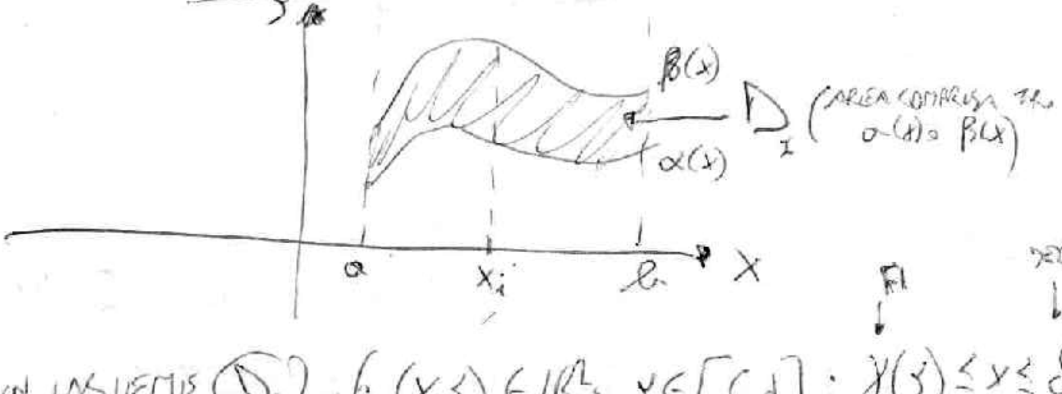
• DOMINIO o INSIEME NORMALE

INSIEME CHIUSO E LIMITATO

→ DATO UN INSIEME $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

CON $\alpha, \beta \in C([a,b])$ → FUNZIONI CONTINUE SU $[a,b]$, $\alpha(x) \leq \beta(x) \ \forall x \in [a,b]$

ESSO SI DICE INSIEME NORMALE RISPETTO ALL'ASSE DELLE $\boxed{X}$

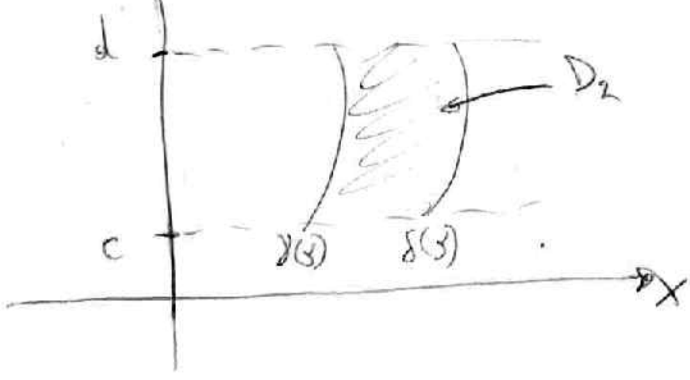


FI DELTA

→ DATO UN INSIEME $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d] : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$

CON $\gamma, \delta \in C([c,d])$; $\gamma(y) \leq \delta(y) \ \forall y \in [c,d]$

ESSO SI DICE INSIEME NORMALE RISPETTO ALL'ASSE DELLE $\boxed{Y}$



NOTA: IN QUESTO CASO, RISPETTO ALL'ASSE $\boxed{X}$ NON SI HA NEMMENO UNA FUNZIONE!!

(A) VERIFICO CHE LA FORMA W SIA ESATTA. COME? 3 CASI:

OPPURE I.D. È UN RETTANGOLO!!!

(1) I.D. SEMPLICEMENTE CONNESSO. VERIFICO CHE LA W SIA CHIUSA CIOÈ:

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} \quad \text{con} \quad \boxed{w = F_1\,dx + F_2\,dy}$$

(2) I.D. NON SEMP. CONNESSO (PRIVATO DI 1 PUNTO) VERIFICO CHE LA W SIA CHIUSA.

POI TROVO UNA CURVA $\boxed{\gamma}$ PER CUI:

SCELGO $\gamma(t) = (\bar{x}+\cos t, \bar{y}+\sin t)$ CON $t \in [0, 2\pi]$, $P(\bar{x}, \bar{y})$ PUNTO DI CUI IL DOMINIO È PRIVATO!!!

NOTA: COME CURVA SCELGO UNA CIRCONFERENZA UNITARIA CON CENTRO NEL PUNTO DI CUI IL DOMINIO SEMP. CONN. È PRIVATO! LA PERCORRIAMO IN SENSO ANTIORARIO QUINDI L'INTEGRALE È POSITIVO!!

$$\int_\gamma w = 0 \Rightarrow \int_0^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^b F_1(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\,\gamma_2'(t)\,dt = 0$$

- **SE W È ESATTA**, CALCOLO IL POTENZIALE CON (LA PRIMITIVA)

$$f(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx + g(y)$$

POI $f_y(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y} + g'(y) \Rightarrow f_y(x,y) = F_2(x,y)$

DA CUI TROVO

$$g'(y) = -\frac{\partial F_1}{\partial y} + F_2(x,y) \quad \text{e quindi} \quad \boxed{g(y) = \int g'(y)}$$

- POSSO TROVARE IL LAVORO COME $f(P_1) - f(P_0)$ (DIFFERENZA DEI POTENZIALI)

QUINDI SOSTITUISCO IN $f(x,y)$ I PUNTI DEGLI ESTREMI DELLA CURVA.

SE $t \in [0, \pi]$ AVRÒ:

$$f(P_1) = f(\gamma(\pi)), \quad f(P_0) = f(\gamma(0))$$

SE $\gamma = (t, t)$ ↓

QUINDI

$$LAVORO = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(\pi,\pi) - f(0,0)$$

(3) L'INSIEME DI DEFINIZIONE NON È NESSUNO DEI PRECEDENTI CASI, OVVERO L'ID DI DEFINIZIONE NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO!!!

(2) IN QUESTO CASO, VERIFICO SE L'ID della FORMA È UNIONE DI PIÙ SOTTOINSIEMI CHE, PRESI SINGOLARMENTE, SONO SEMPLICEMENTE CONNESSI ed APERTI!!!

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$$

APPLICO QUINDI, LE CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI SUI SINGOLI SOTTOINSIEMI E TROVO IL POTENZIALE.

SE DAL CALCOLO OTTENGO $g(y) = c$, SIGNIFICA CHE L'ESPRESSIONE DEL POTENZIALE È UGUALE PER TUTTI I SOTTOINSIEMI AD ECCEZIONE DELLA COSTANTE!! AVRÒ, QUINDI, $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ COSTANTI DIVERSE!!

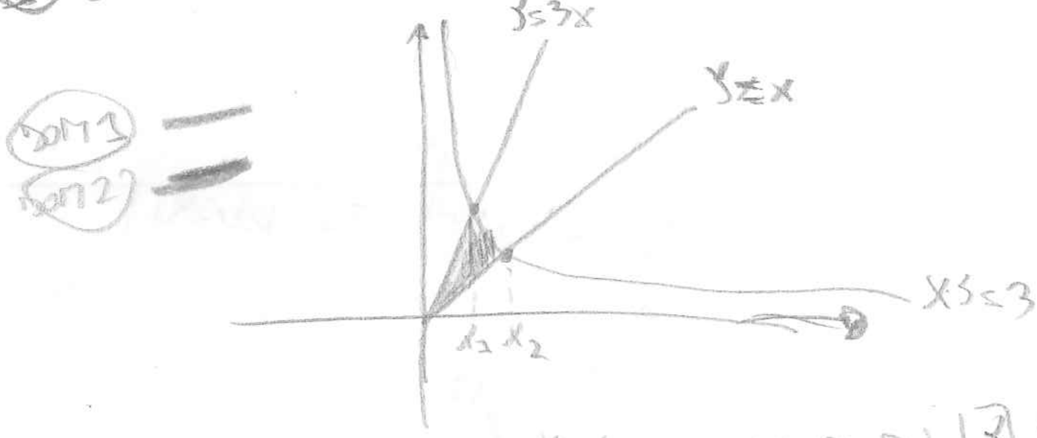
$$c_i, \; i \in \{1 \ldots n\}$$

(4) SE QUESTO NON È POSSIBILE, DEVO RICORRERE ALLA DEFINIZIONE DI LOCALE ESATTEZZA. ASSUNTO CIOÈ, CHE DATO UN PUNTO $P \in I.D.$, ESISTE UN INTORNO SFERICO $B(P)$ PER CUI $\omega / B(P)$ È ESATTA!! QUINDI POSSO CALCOLARE IL POTENZIALE LOCALE!!!

INTEGRALI DOPPI

· LA RISOLUZIONE DI UN INTEGRALE DOPPIO PARTE DALL'ANALISI DEL DOMINIO $\boxed{D}$ SU CUI SI VA AD INTEGRARE.
A SECONDA DI COME È FATTO, SI TRAGGONO 3 CONCLUSIONI:

1) DOMINIO <u>NON RADIALE</u> CON POCHI SOTTODOMINI

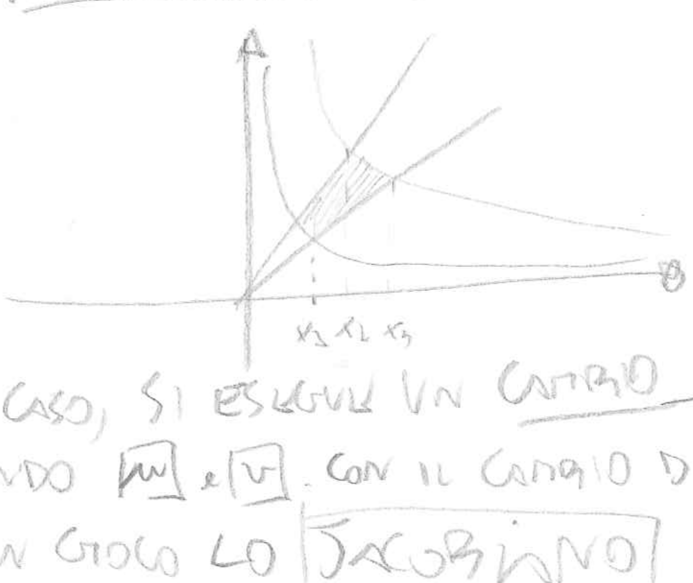


IN TALE CASO, POICHÉ L'ANDAMENTO DI $\boxed{y}$ VARIA, SI INDIVIDUANO <u>2 SOTTODOMINI</u> E SI EFFETTUANO DUE INTEGRALI, UNO PER OGNI SOTTODOMINIO.

$$I = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

GLI INTERVALLI DI VARIAZIONE DI $\boxed{x}$ e $\boxed{y}$ SI FANNO CALCOLANDO $\boxed{x_1}$ e $\boxed{x_2}$ CON I SISTEMI CHE INTERSECANO LE FUNZIONI DATE (VEDI ES. SVOLTO)

2) DOMINIO <u>NON RADIALE</u> CON TANTI SOTTODOMINI



IN QUESTO CASO, SI ESEGUE UN <u>CAMBIO DI VARIABILI</u> UTILIZZANDO $\boxed{u}$ e $\boxed{v}$. CON IL CAMBIO DI VARIABILI ENTRA IN GIOCO LO $\boxed{\text{JACOBIANO}}$

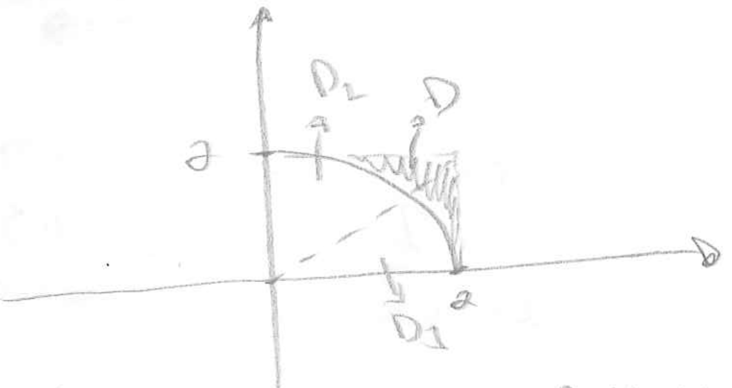
$$I = \int_a^b \int_c^d f(u,v)\cdot |J| \, du \, dv$$

con

$$|J| = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(u)}{\partial u} & \dfrac{\partial f(u)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f(v)}{u} & \dfrac{\partial f(v)}{\partial u} \end{pmatrix}$$

con $f(u,v) = (\underset{\uparrow}{\overset{f(u)}{u}}, \underset{\uparrow}{\overset{f(v)}{v}})$

3) DOMINIO RADIALE (COORDINATE POLARI)



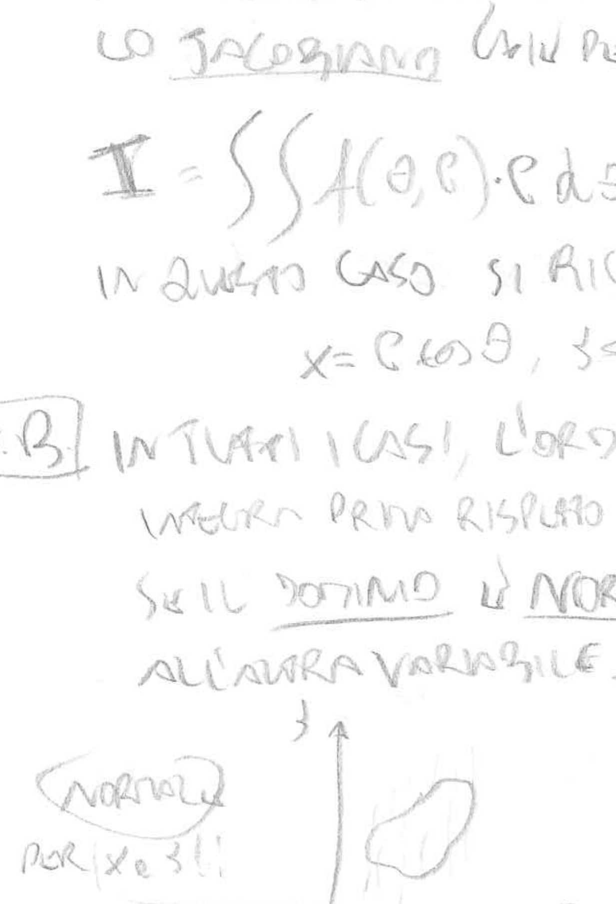
IN QUESTO CASO, SI EFFETTUA IL PASSAGGIO DI VARIABILI IN COORDINATE POLARI. ANCHE QUI C'È LO JACOBIANO CHE PERÒ È $\boxed{|J| = \rho}$ SEMPRE!!!

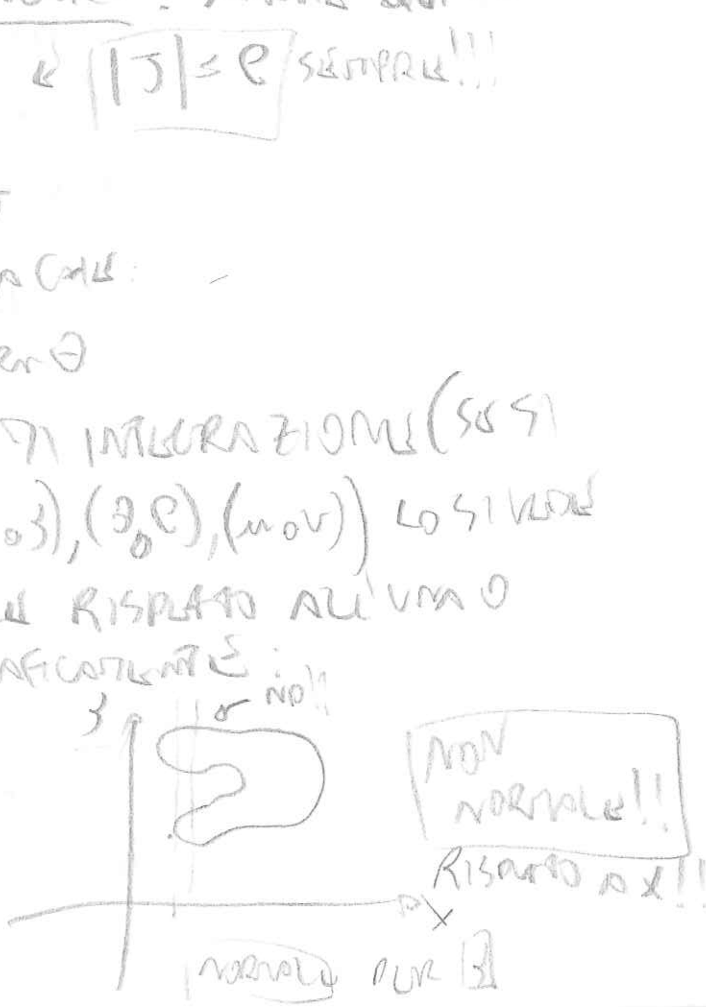
$$I = \int\int f(\theta,\rho)\cdot \rho \, d\theta \, dv$$

IN QUESTO CASO SI RICORDA CHE:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta$$

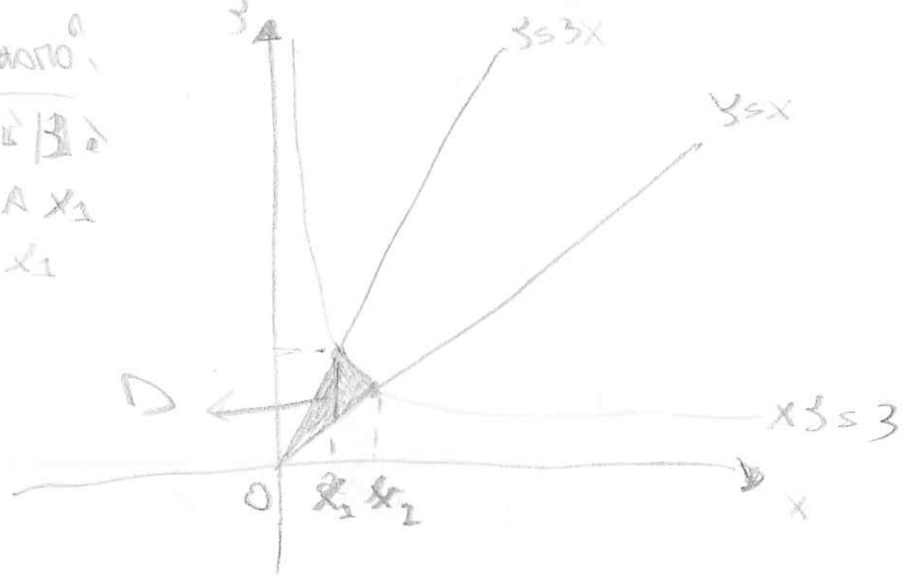
$\boxed{\text{N.B.}}$ IN TUTTI I CASI, L'ORDINE DI INTEGRAZIONE (SE SI INTEGRA PRIMA RISPETTO A (x o y), (θ o ρ), (u o v)) LO SI VEDE SE IL DOMINIO È NORMALE RISPETTO ALL'UNA O ALL'ALTRA VARIABILE. GRAFICAMENTE:





ESEMPIO DI DOMINIO (1)

PERCHÈ SEPARATO?
SI SEPARA PERCHÈ $\boxed{y}$ È DELIMITATA FINO A x_1 DA $\boxed{3x}$, DOPO x_1 DA $\boxed{xy \leq 3}$!!



- IN QUESTO CASO $D: D_1 \cup D_2$ (UNIONE DI DUE DOMINI)

SI TROVANO LE ASCISSE x_1, x_2 CON DUE SISTEMI:

PER x_1 (1) $\begin{cases} xy = 3 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y = 3x \end{cases}$

PER x_2 (2) $\begin{cases} xy = 3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ y = x \end{cases}$

POICHÈ $x \geq 0$, CONSIDERO SOLO $x_1 = 1$ e $x_2 = \sqrt{3}$

- POSSO ORA DEFINIRE I DUE DOMINI:

(ROSSO) $D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 3x \}$

(VERDE) $D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{3},\ x \leq y \leq \frac{3}{x} \}$

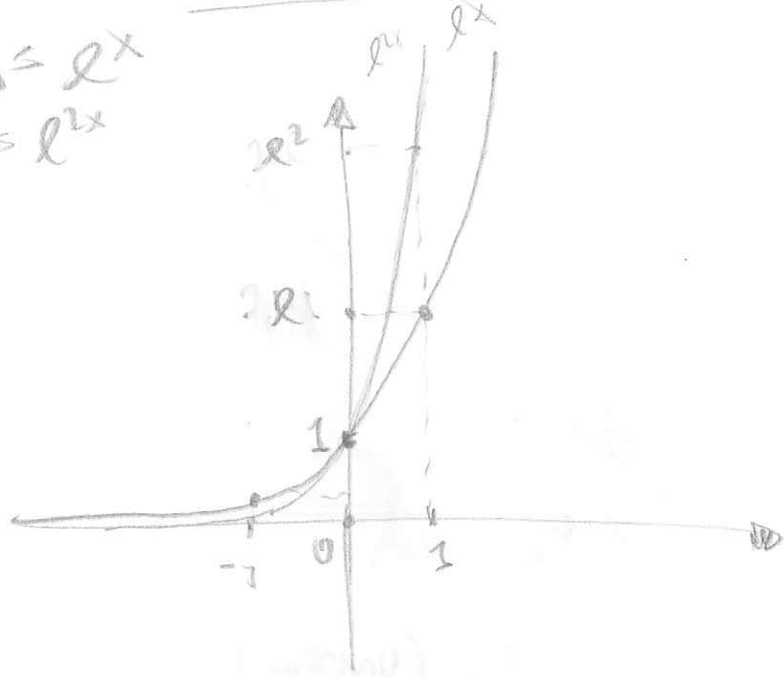
- QUINDI CALCOLO L'INTEGRALE:

$I = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} f\,dx\,dy$ (L'ORDINE DI INTEGRAZIONE È UGUALE VISTO CHE IL DOM È NORMALE RISP. AD ENTRAMBI)

GRAFICI FONDAMENTALI

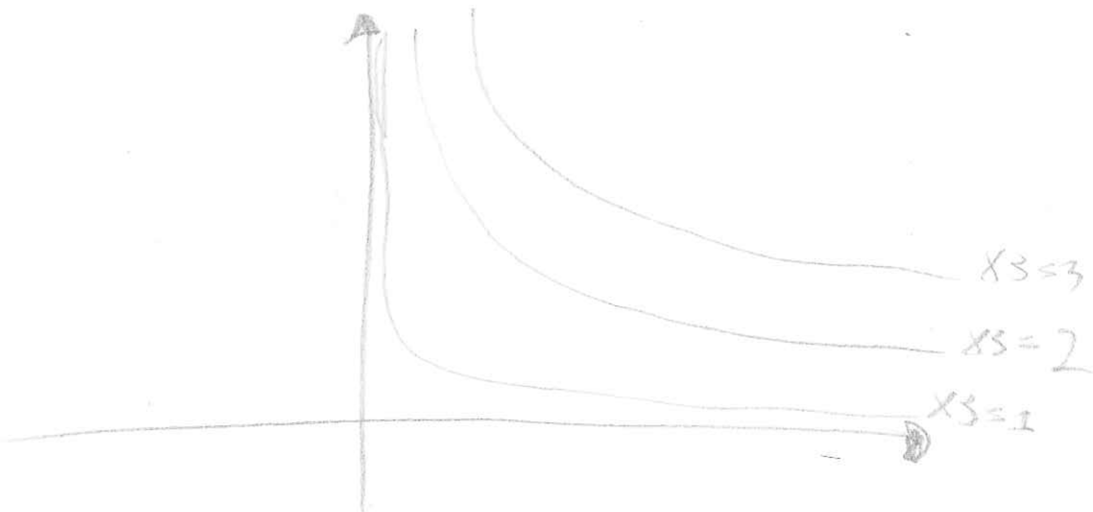
$y = e^x$

$y = e^{2x}$



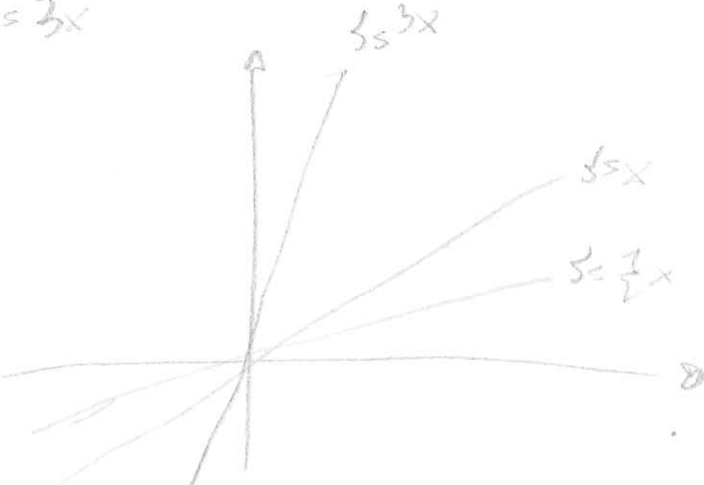
$f(x,y): xy = 1$

$f(x,y): xy = 2$



$y = x$

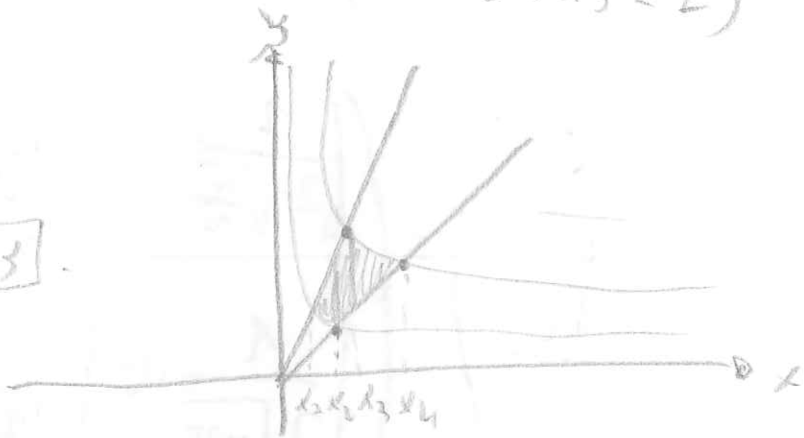
$y = 3x$



ESEMPIO DOMINIO (2)

$$\iint_D xy \, dx\, dy \qquad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ \frac{1}{2}x \le y \le 2x,\ 1 \le xy \le 2 \right)$$

NOTA: IL DOMINIO È NORMALE SIA RISP. A $\boxed{x \text{ che } y}$.



- IN QUESTO CASO SONO PRESENTI BEN $\boxed{3}$ SOTTODOMINI DA ANALIZZARE. CI CONVIENE OPERARE UN CAMBIO DI VARIABILI IN $\boxed{u \text{ e } v}$ (NON SONO PRESENTI DOMINI RADIALI)

- NELLA DEFINIZIONE DEL DOMINIO, CONSIDERO LE RELAZIONI:

$$\frac{1}{2}x \le y \le 2x \quad , \quad 1 \le xy \le 2$$

LE RISCRIVO IN MODO DA PORTARE LE DUE VARIABILI NELLA PARTE CENTRALE:

$$\frac{1}{2} \le \frac{y}{x} \le 2 \quad , \quad 1 \le xy \le 2$$

EFFETTUO IL CAMBIO ASSUMENDO $\boxed{u = xy}$ E $\boxed{v = \frac{y}{x}}$. IL NUOVO DOMINIO È COSÌ DEFINITO:

$$T = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [1,2],\ v \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \right.$$

NOTA: IL DOMINIO CONTINUA AD ESSERE NORMALE.

- TROVIAMO ORA LE ESPRESSIONI DI $\boxed{x \text{ e } y}$ PER POTERLE SOSTITUIRE NELL' $\boxed{\int}$ INIZIALE:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{y} \\ y = v \cdot x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{\sqrt{uv}} = \frac{\sqrt{u}\cdot\sqrt{u}}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{v}} = \boxed{\sqrt{\frac{u}{v}}} \\ y = v \cdot \frac{u}{y} \Rightarrow y^2 = v \cdot u = \boxed{\sqrt{uv}} \end{cases}$$

QUINDI LA NOSTRA f DIVENTA: (con $\Phi(u,v)=\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$) ④

$$\Phi_1 \qquad \Phi_2$$

$$f(u,v)=\sqrt{\frac{u}{\cancel{v}}}\cdot\sqrt{u\cancel{v}}=\boxed{u}$$

PRIMA DI PROSEGUIRE IL CALCOLO, È NECESSARIO TROVARE LO JACOBIANO:

$$|J|=\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{u}{v}}}\cdot\frac{1}{v}\right] & \left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{u}{v}}}\cdot u\cdot\left(-\frac{1}{v^2}\right)\right] \\ \left[\frac{1}{2\sqrt{uv}}\cdot v\right] & \left[\frac{1}{2\sqrt{uv}}\cdot u\right] \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{u}{\cancel{v}}}}\cdot\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u\cdot\cancel{v}}}\cdot u\right)-\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{u}{\cancel{v}}}}\cdot u\cdot\left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{u\cancel{v}}}\cdot v\right)=$$

$$=\frac{\cancel{u}}{4v\cdot\cancel{u}}-\frac{\cancel{u}\cancel{v}}{4\cdot\cancel{u}\cdot(-v^2)}=\frac{1}{4v}+\frac{1}{4v}=\boxed{\frac{1}{2v}}$$

. ORA SI PUÒ CALCOLARE L'INTEGRALE DOPPIO:

$$\underline{I}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{1}^{2}u\cdot|J|\,du\,dv$$

INTEGRALE DOPPIO 3

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^{a/\cos\theta}\frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_a^{a/\sin\theta}\frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big[\rho\Big]_a^{a/\cos\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[\rho\Big]_a^{a/\sin\theta}d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a}{\cos\theta}-a\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{\sin\theta}-a\,d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a}{\cos\theta}d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{\sin\theta}d\theta-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}a\,d\theta=$$

$$=a\cdot\Big[\log\Big|tg\Big(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-a\cdot\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+a\cdot\Big[\log\Big|\cot g\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-a\cdot\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=a\cdot\Big[\log\Big(1+tg\Big(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big)\Big]-a\cdot\frac{\pi}{4}+a\cdot\Big[\log\Big(\cot g\Big(\frac{\pi}{8}\Big)\Big)\Big]-$$

$\frac{2\pi+2\pi}{8}$ $\quad \cot g\Big(\frac{\pi}{4}+\Big)+\frac{\pi}{4}$

$$-a\cdot\Big(\frac{\pi}{4}\Big)=a\cdot\log\big|1+(\sqrt{2}+1)\big|-a\frac{\pi}{4}-a\cdot\log\big|\sqrt{2}-1\big|-a\frac{\pi}{4}=$$

$$=a\Big(-\frac{\pi}{2}+\log\Big|\frac{(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1}\Big|\Big)$$

INTEGRALE DOPPIO 1: NO CAMBIO VARIABILI (1)

$$I = \int_0^1 \int_x^{3x} x^2 e^{xy}\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} \int_x^{\frac{3}{x}} x^2 e^{xy}\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 x \cdot \left[e^{xy}\right]_x^{3x} dx + \int_1^{\sqrt{3}} x \cdot \left[e^{xy}\right]_x^{\frac{3}{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 x \cdot \left(e^{3x^2} - e^{x^2}\right) dx + \int_1^{\sqrt{3}} x \cdot \left(e^3 - e^{x^2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 x \cdot e^{3x^2} dx - \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx + \int_1^{\sqrt{3}} x \cdot e^3 dx - \int_1^{\sqrt{3}} x \cdot e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[e^{3x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x^2}\right]_0^1 + e^3 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x^2}\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[e^3 - e^0\right] - \frac{1}{2} \cdot \left[e^1 - e^0\right] + e^3 \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2} \cdot \left[e^3 - e^1\right] =$$

$$= \frac{1}{6} e^3 - \frac{1}{6} \cancel{- \frac{1}{2} e} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^3 - \frac{1}{2} e^3 - \frac{1}{2} e^3 \cancel{+ \frac{1}{2} e} =$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{2} - 1\right) e^3 + \frac{2}{6} = \left(\frac{1 + 9 - 6}{6}\right) e^3 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} e^3 + \frac{1}{3}$$

INTEGRALE DOPPIO 2: CAMBIO CON $\boxed{u \text{ e } v}$. SI FA QUANDO CI SONO TANTI SOTTODOMINI (PIÙ DI DUE) MA SENZA SIMMETRIA RADIALE (CERCHI, ELLISSI, ETC...)

(2)

$$I = \int_{1/2}^{2} \int_1^2 u \cdot |J|\,du\,dv = \int_{1/2}^{2} \int_1^2 u \cdot \frac{1}{2v}\,du\,dv =$$

$$= \int_{1/2}^{2} \frac{1}{2v} \cdot \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 dv = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{2v} \cdot \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) dv =$$

$$= \int_{3/2}^{2} \frac{1}{2v} \cdot \frac{3}{2}\,dv = \frac{3}{4} \cdot \int_{3/2}^{2} \frac{1}{v}\,dv = \frac{3}{4} \cdot \left[\log|2| - \log\left|\frac{1}{2}\right|\right] =$$

$$= \frac{3}{4} \log|4|$$